

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Elie ROUBINE

1^{re} THÈSE : Étude des ondes électromagnétiques guidées par les
circuits en hélice.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 Décembre 1951, devant la Commission d'Examen :

MM. Louis DE BROGLIE, *Président.*

P. GRIVET

A. LICHNEROWICZ

} *Examineurs.*

ÉDITIONS DE LA
REVUE D'OPTIQUE THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE

165, Rue de Sèvres — 3 et 5, Boulevard Pasteur

PARIS 15°

1952

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Elie ROUBINE

1^{re} THÈSE : Étude des ondes électromagnétiques guidées par les
circuits en hélice.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 Décembre 1951, devant la Commission d'Examen :

MM. Louis DE BROGLIE, *Président.*

P. GRIVET

A. LICHNEROWICZ

} *Examineurs.*

ÉDITIONS DE LA
REVUE D'OPTIQUE THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE

165, Rue de Sèvres — 3 et 5, Boulevard Pasteur

PARIS 15^e

1952

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	COULOMB	T	Physique du Globe.
A. DENJOY	T	Théorie des Fonctions.	Mlle COUSIN	T	Biologie animale (P. C. B.).
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	CHRÉTIEN		Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	P. DRACH		Zoologie.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	KASTLER		Physique.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	CHATELET	T	Arithmétique et Théorie des nombres.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	EPHRUSSI	T	Génétique.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	BAUER	T	Chimie-Physique.
JOB	T	Chimie générale.	RIVIÈRE		Géologie (P. C. B.).
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	GAUTHERET		Biologie végétale (P. C. B.)
COMBES	T	Physiologie végétale.	LUCAS		Physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	A. THOMAS		Évolution des êtres organisés.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	ARNULF		Optique appliquée.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	MAX MORAND		Physique.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	SOLEILLET		Physique.
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	DANJON	T	Astronomie.
CHAZY	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.	LAPORTE	T	Physique générale et Radio-activité.
DUPONT	T	Théories chimiques.	JANET		Mathématiques générales.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	PETIT	T	Biologie maritime.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	QUENEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	GALLIEN		Biologie animale (P. C. B.).
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	EICHHORN		Biologie végétale (P. C. B.).
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P. C. B.).
AUBEL	T	Chimie biologique.	LAVAL		Physique (P. C. B.).
Mme JOLIO-CURIE	T	Physique générale et Radio-activité.	Mlle CAUCHOIS		Chimie-Physique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	THELLIER		Physique du Globe.
CABANNES	T	Recherches physiques.	AUDUBERT		Électrochimie.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	L'HÉRITIER		Génétique.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	GRIVET	T	Radio-Électricité.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	PONCIN		Mécanique des fluides.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
WYART	T	Minéralogie.	DUBREIL		Mathématiques générales.
TEISSIER	T	Zoologie.	QUELET		Chimie (P. C. B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale.	CAGNIARD		Géophysique appliquée.
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	CHAMPETIER		Chimie appliquée.
MONNIER		Physiologie générale.	CUVILLIER		Géologie structurale et Géologie appliquée.
PIVETEAU	T	Géologie.	JUNG		Pétrographie.
ROCARD	T	Physique.	TRILLAT		Physique (P. C. B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques.	WIEMANN		Chimie (P. C. B.)
SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.	LICHNEROWICZ		Mathématiques.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	JACQUINOT		Physique (P. C. B.).
FAYARD		Calcul des probabilités et Physique mathématique.	VASSY		Physique de l'Atmosphère.
			DESTOUCHES		Théories physiques.
			M. PRUVOST	T	Géologie.
			AMIEL		Chimie (P. C. B.).
			HOCART		Minéralogie.
			MACHEBŒUF		Microbiologie.
			J. P. MATHIEU		Physique (P. C. B.).
			COUTEAUX		Biologie animale (P. C. B.).
			MAY		Biologie animale (P. C. B.).

Secrétaire : Ch. MONIER.

A LA MÉMOIRE
DE MA MÈRE



ÉTUDE DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES GUIDÉES PAR LES CIRCUITS EN HÉLICE

par É. ROUBINE

Agrégé de l'Université, Docteur ès Sciences *.

SOMMAIRE. — Le 1^{er} chapitre rappelle sommairement l'évolution des problèmes posés par les circuits en hélice et décrit deux méthodes de résolution approchée du problème particulier de la propagation le long de ces circuits. L'étude d'un premier modèle, celui de la nappe cylindrique à conductivité oblique, fait l'objet du 2^e chapitre. Le 3^e chapitre expose le calcul des six composantes du champ sur l'axe d'une hélice filiforme et contient une discussion des résultats. Dans le 4^e chapitre on donne une forme nécessaire des expressions des composantes du champ guidé par un circuit hélicoïdal quelconque. L'application des résultats obtenus au calcul du champ d'une hélice filiforme dans tout l'espace par une méthode de raccordement constitue le 5^e chapitre. L'emploi de séries divergentes mais sommables ($C, 1$) permet d'éviter les difficultés relatives à la considération d'un fil sans épaisseur. Le chapitre contient diverses applications : vitesse le long du fil, solénoïde ordinaire, champ au voisinage de l'axe, champ au voisinage du fil, justification de la théorie du tube à ondes progressives,.... Le 6^e chapitre étudie sommairement l'extension des méthodes de calcul à des circuits moins simples (lignes à retard, hélice sous écran). Enfin le 7^e et dernier chapitre contient une discussion de résultats de mesures en basse et en haute fréquence et se termine par l'examen du problème de l'antenne en hélice.

CHAPITRE I

A. HISTORIQUE SOMMAIRE.

Dans son mémoire fondamental de 1822 AMPÈRE mentionne le solénoïde. Le premier circuit en hélice est ainsi né avec l'électrodynamique. C'est un moyen ingénieux de simuler un empilement de spires circulaires parcourues par le même courant de façon à obtenir des champs magnétiques suffisamment intenses. Sous l'aspect des divers enroulements des transformateurs, des machines, .. son rôle dans le développement de l'Électrotechnique a été considérable.

L'Électrotechnique dite des courants faibles, les Télécommunications avec ou sans fil, fournirent un nouveau champ d'application aux enroulements en hélice (transformateurs divers, bobines d'induction, ...). Aux fréquences radioélectriques usuelles où l'approximation quasi stationnaire est acceptable les bobines restèrent des éléments de circuit à constantes localisées. Mais l'emploi des ondes ultra-courtes devait attirer l'attention sur le comportement des enroulements en régime rapidement variable : oscillations libres des bobines (périodes hertziennes et post-hertziennes) ou propagation d'ondes entretenues le long d'hélices longues (période contemporaine).

Les propriétés remarquables de la vitesse et de la polarisation d'une telle onde ont trouvé ces dernières années des applications importantes. Les hélices sont des circuits « ralentisseurs ». Un fil isolé enroulé en hélice sur une âme métallique constitue une ligne à retard dont la longueur peut n'être pas prohibitive. On sait le rôle de ce type de circuit dans les techniques d'impulsions. Mais l'application la plus ingé-

nieuse des propriétés retardatrices de l'hélice a certainement été le tube à ondes progressives, sous sa forme initiale tout au moins. Le but poursuivi est d'amener la vitesse d'une onde électromagnétique à la valeur de celle des électrons d'un faisceau axial avec lesquels elle échange de l'énergie. Le tube peut alors fonctionner avec des tensions raisonnables. L'apériodicité du circuit utilisé permet de réaliser un amplificateur à bande exceptionnellement large [15].

D'un autre côté, dans certaines bandes de fréquences, le champ d'une hélice est pratiquement polarisé circulairement. Cette propriété a été exploitée dans l'antenne en hélice [42]. Cette antenne économique est très directive, à large bande et indifférente, en réception, à la polarisation du champ incident, d'où son utilité en particulier dans les recherches de Radioastronomie. Signalons enfin l'application toute récente de la symétrie de l'hélice à la réalisation d'un polarimètre hertzien [34.] Une spire d'hélice dans un guide d'ondes circulaire est utilisée pour faire tourner le plan de polarisation d'une onde rectiligne incidente.

Les problèmes posés par les hélices ont suscité un grand nombre de travaux expérimentaux ou théoriques, mais dont la plupart ont été consacrés aux circuits en régime quasi stationnaire. Il est clair qu'une bobine ordinaire à spires fines jointives, c'est-à-dire pratiquement circulaires, parcourues par le même courant instantané, possède une symétrie géométrique et électrique qui en simplifie considérablement l'étude théorique. L'image d'une nappe cylindrique équivalente s'impose. On trouve, dans tous les Cours de Physique, le calcul du champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde par cette méthode. Celle-ci est déjà utilisée dans le Traité de MAXWELL. SOMMERFELD en 1904, a traité la nappe comme une couche de passage avec des conditions

* A la Compagnie Française Thomson-Houston.

[] Pour tout renvoi entre crochets se reporter in fine à la bibliographie.

aux limites appropriées [37]. L'étude du solénoïde à spires lâches est beaucoup plus difficile. Elle a été faite par LAMB, en 1923, dans le cas particulier du fil infiniment mince [17]. Le travail de LAMB semble d'ailleurs être surtout connu par les aérodynamiciens (il a été utilisé en particulier par M. R. SIESTRUCK dans une remarquable étude des hélices — celles de la Mécanique des Fluides — dans laquelle nous avons trouvé des renseignements précieux [46]).

Les oscillations libres des bobines n'ont pas donné lieu à un grand nombre de travaux théoriques. En 1897, POCKLINGTON, dans une étude sur les oscillations des fils à section circulaire de très petit diamètre, a obtenu d'intéressants résultats concernant la vitesse des ondes le long d'une hélice [27]. Une méthode de calcul utilisant l'approximation quasi stationnaire a été proposée en 1914 par LENZ [20]. En 1930, dans un important mémoire sur les oscillations libres des conducteurs minces, travail qui est à l'origine d'une théorie de l'antenne devenue célèbre, HALLEN a examiné, en particulier, le cas des enroulements en hélice [11]. La méthode de HALLEN reposant sur l'emploi d'une équation intégrale du courant, telle que le champ satisfasse aux conditions aux limites, est le prolongement naturel de la méthode de POCKLINGTON. Son originalité profonde réside dans la résolution de cette équation intégrale et son intérêt dans la valeur des approximations obtenues. L'étude, en régime entretenu, des ondes électromagnétiques guidées par des circuits en hélice ne devait être entreprise que récemment. Elle a été provoquée par des besoins techniques, notamment par la réalisation du tube à ondes progressives. En 1947, PIERCE aux États-Unis [26], nous-même en France [28] proposons l'approximation qui consiste à substituer à l'enroulement une nappe continue à conductivité oblique. Ce modèle fut inclus dans une théorie du tube à ondes progressives par CHU et JACKSON aux États-Unis [4], par LAPLUME et LAPOSTOLLE en France [18, 19]. En 1947 nous avons également donné l'expression du champ électrique axial d'un fil enroulé en hélice [28]. Plus récemment le résultat a été étendu à l'ensemble des composantes du champ électromagnétique dans tout l'espace [30, 32]. Aux États-Unis, PHILLIPS a calculé le champ à partir d'un vecteur de HERTZ [24]. Enfin, il y a quelques mois, SOLLFREY publiait une intéressante solution du problème du fil mince à section circulaire dans un système de coordonnées hélicoïdo-polaires contenant, comme surface coordonnée, celle qui limite le conducteur [36]. La méthode de PHILLIPS ne s'applique qu'au fil sans épaisseur ; celle de SOLLFREY, aux conducteurs de section finie, mais circulaire et petite. La nôtre est plus élémentaire et susceptible d'applications variées, (ruban en hélice, ligne à retard, ...).

Les études expérimentales reflètent, elles aussi, l'évolution générale de la Radioélectricité. Commandées par des besoins très concrets, les mesures sur les divers types d'enroulements ont été rarement

entreprises en vue de vérifier directement des théories aux résultats peu maniables. Bornons-nous aux régimes rapidement variables. La période post-hertzienne qui s'étend, en gros, jusque vers la fin de la première guerre mondiale, a surtout posé des problèmes de fréquences propres. D'où des séries de mesures, notamment dues à l'École allemande (DRUDE en 1902 [7], GEISS en 1921 [8], HOFFMEIER en 1924 [12]). De façon analogue, les recherches contemporaines sur l'antenne en hélice, le tube à ondes progressives, ont provoqué une étude expérimentale systématique des ondes guidées par un fil enroulé en hélice : mesure de la vitesse, répartition du champ électrique... On peut citer le travail effectué en France par JESSEL et WALLAUSCHEK au Centre National d'Études des Télécommunications [14]. Il est probable qu'une étude analogue a été entreprise aux États-Unis dans un certain nombre de laboratoires. Mais peu de résultats ont été publiés jusqu'à ce jour [5, 20].

B. RÉOLUTION APPROCHÉE DU PROBLÈME.

Le problème que l'on a essayé d'aborder dans le présent travail est, de façon précise, la recherche d'ondes électromagnétiques progressives guidées par certains circuits hélicoïdaux illimités parfaitement conducteurs. Même aussi nettement délimité, le problème est encore trop général, et il est douteux qu'une solution exacte utilisable puisse être trouvée. Commençons donc par nous borner à un exemple important de circuit hélicoïdal : celui du fil de section circulaire enroulé en hélice ordinaire. La difficulté du problème réside dans l'impossibilité de trouver un système de coordonnées dans lequel :

- 1° la surface du conducteur soit coordonnée,
- 2° les équations du champ soient séparables.

On est donc conduit à résoudre approximativement le problème et pour cela à envisager deux méthodes :

- 1° résoudre de façon approchée les équations exactes du problème ;
- 2° remplacer le conducteur par un conducteur approché se prêtant à une résolution exacte, ou tout au moins plus facile.

Ce double aspect de la résolution approchée d'un problème se rencontre constamment en Physique et dans la Technique. Le problème de l'antenne d'émission fournit un exemple frappant de situation analogue. La répartition du courant sur un dipôle satisfait à une équation intégrale qu'on ne peut résoudre que de façon approchée (HALLEN). Mais on peut aussi substituer au dipôle cylindrique un ellipsoïde de révolution très allongé, d'où l'emploi de coordonnées elliptiques de révolution (MAX ABRAHAM, STRATTON et CHU) ou encore un double cône très délié, d'où l'emploi des coordonnées sphériques (SCHELKUNOFF). En ce qui concerne l'hélice, le calcul de SOLLFREY est une illustration de la pre-

mière méthode. En revanche, les autres tentatives, la nôtre en particulier, utilisent la seconde.

Dans le présent travail on discute notamment deux types de circuit dont aucun n'est le véritable solénoïde à fil relativement épais. Mais l'un et l'autre se prêtent à une résolution complète du problème.

a) Couche continue.

L'idée d'étaler le courant de façon continue sur la surface d'un cylindre est, comme on l'a déjà mentionné, très ancienne. Elle est naturellement suggérée par les enroulements à spires jointives. En 1947 nous avons proposé d'étendre le procédé aux problèmes de propagation. L'idée essentielle avait été de douer la nappe cylindrique d'une conductivité oblique et de lui attacher des conditions aux limites convenables. Les lignes de courant sont des hélices égales et de même sens uniformément réparties sur la nappe. Leur inclinaison est supposée quelconque, de sorte qu'on substitue à l'enroulement un circuit de nature très différente. Mais ce circuit possède maintenant une symétrie de révolution qui permet d'obtenir une solution simple du problème, devenu un problème de guide d'ondes circulaires. Il est à prévoir que les résultats obtenus s'appliqueront d'autant plus fidèlement au solénoïde que l'inclinaison des spires est plus faible.

b) Fil infiniment mince.

Un second procédé d'approximation consiste à substituer au conducteur enroulé en hélice un fil de section nulle. La simplification provient de la réduction à un conducteur à une seule dimension. L'intérêt de la méthode est qu'elle ne masque plus la symétrie hélicoïdale du circuit. Elle fournit en outre des ordres de grandeur du champ au voisinage du fil, là où la méthode de la couche continue est complètement impuissante. Elle s'applique à toute valeur du pas de l'hélice. En revanche, elle ne permet pas de prendre en considération l'interaction des spires voisines, interaction qui est susceptible de modifier la vitesse de propagation des ondes guidées. La méthode est donc d'autant plus valable que le rapport du diamètre du fil de l'enroulement à l'espacement des spires est plus petit.

Il est clair que les deux méthodes proposées ont le même point faible. Elles ne rendent pas compte, au départ, du rôle de l'épaisseur du fil. D'ailleurs, à notre connaissance, la théorie du solénoïde à fil épais n'a pas encore été faite. Dans le calcul de SOLLFREY la section du fil est supposée finie. Mais le système de coordonnées curvilignes adopté par l'auteur ne se prête qu'à une séparation approchée des variables qui suppose le fil assez mince. Finalement on néglige encore l'interaction entre les spires et les résultats obtenus ne diffèrent guère des nôtres.

La méthode de calcul qui sera exposée plus loin consiste à raccorder à travers la surface du cylindre des solutions intérieure et extérieure. Elle est susceptible d'une grande généralité. Les calculs sont relati-

vement simples pour quelques types de circuit (hélice à fil infiniment mince, ligne à retard). Les cas plus généraux conduiraient à des systèmes linéaires infinis justiciables d'une résolution numérique approchée. Une étude des hélices à fil épais pourrait être tentée dans cette voie.

Nous nous sommes efforcé de dégager de façon précise les champs d'application des deux types de circuits approchés : couche continue et fil fin. Dans certaines conditions les résultats sont concordants. En particulier la considération des modes supérieurs guidés par la couche continue permet d'étendre le champ commun de validité. En revanche, certains désaccords sont irréductibles. Ils sont dus à la différence de structure entre les deux circuits. Nous comparerons les résultats théoriques à ceux des résultats expérimentaux qui ont déjà été publiés.

Avec le souci de fournir au technicien des méthodes de calcul utilisables, nous avons attaché une grande importance aux calculs numériques et à la possibilité de les conduire jusqu'au bout.

C. NOTATIONS.

1° Coordonnées semi-polaires : r, θ, z .

Hélices : $r = a, z - h\theta = C^{\text{te}}$, de pas h enroulées sur un cylindre de révolution de rayon a . L'espacement des spires est $2\pi h$. Leur inclinaison $(\pi/2) - \alpha$ sur les génératrices du cylindre est donc telle que : $h = a \operatorname{tg} \alpha$.

2° Les conducteurs sont supposés parfaits et plongés dans un diélectrique parfait de constante diélectrique ϵ et de perméabilité magnétique μ . On ne changera rien en sous-entendant que ce sont les constantes ϵ_0 et μ_0 du vide (voir par exemple, L. DE BROGLIE [42]).

On se bornera aux régimes harmoniques dans le temps. On désignera par :

$\omega = 2\pi f$ la pulsation du régime envisagé,

$c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ la vitesse de propagation des ondes libres,

$\lambda = c/f$ la longueur des ondes libres,

$k = \omega/c = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = 2\pi/\lambda$, la constante de propagation des ondes libres.

Il est commode d'introduire l'impédance caractéristique du milieu relative à la propagation des ondes planes monochromatiques :

$$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon};$$

les relations :

$$\omega\mu = k\eta, \quad \omega\epsilon = k/\eta$$

seront constamment utilisées.

3° On envisagera la propagation d'ondes le long d'une hélice. On désignera par c' la vitesse de propagation le long du fil, et par $k' = \omega/c'$ la constante de propagation associée. Enfin parallèlement à l'axe Oz on considérera une vitesse de propagation v et la constante de phase associée :

$$\beta = \omega/v.$$

4° Dans le milieu parfait, le champ électromagnétique est entièrement décrit par le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{H}$. Le régime étant harmonique dans le temps, la représentation complexe du champ sera systématiquement adoptée. Aucune confusion n'étant à craindre ici les champs complexes seront désignés comme ci-dessus.

5° Tous les calculs sont effectués dans un système d'unités coordonné ($\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$) et rationalisé. Les résultats numériques sont donnés dans le système pratique M. K. S. A. Rappelons que dans le vide :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 10^{-9}/36\pi & \text{F/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} & \text{H/m} \end{aligned}$$

et

$$\eta_0 = 120\pi \quad \Omega$$

Pour donner aux applications numériques un support concret, les calculs ont été généralement effectués en partant du circuit utilisé dans l'un des tubes à ondes progressives réalisés au Centre National d'Études des Télécommunications [18]. Voici les caractéristiques de l'hélice de ce tube, qui sera désigné par « tube CNET » dans la suite :

Hélice moyenne : rayon $a = 2,9$ mm ;
pas $2\pi h = 1,4$ mm.

Diamètre du fil : $d = 0,5$ mm.

On aura donc $h = 0,223$ mm, et $\cotg \alpha = a/h = 13,02$

CHAPITRE II

MÉTHODE DE LA COUCHE CONTINUE

1° Lorsqu'un fil fin est enroulé en hélice à spires serrées, par exemple à spires jointives, l'image d'une couche continue équivalente se présente naturellement. C'est ainsi que, dans les Cours, on établit la théorie élémentaire du solénoïde. Nous substituons à l'hélice la surface du cylindre moyen sur lequel elle est enroulée, et nous admettons ici que, du point de vue électrique, cette surface est un milieu anisotrope singulier. C'est une couche métallique sans épaisseur douée d'une conductivité infinie dans la direction des hélices de pas h tracées sur le cylindre, dans le même sens que le fil envisagé, et d'une conductivité nulle dans toute autre direction. En tout point de la couche la densité de courant $\vec{J}$, superficielle, est inclinée de l'angle $(\pi/2) - \alpha$ sur les génératrices du cylindre et nous pouvons en définir une valeur moyenne en « étalant » entre deux spires contiguës l'intensité du courant I qui parcourt le fil (fig. II-1) :

$$(II-1) \quad \begin{aligned} I &= 2\pi h \cos \alpha J \\ &= 2\pi a \sin \alpha J. \end{aligned}$$

Il est évident que la théorie de la couche continue n'est qu'une méthode de calcul approchée, qui est d'autant moins valable que le fil est épais ou les spires de l'hélice écartées. L'expérience montre

cependant que ses résultats restent acceptables dans des conditions assez larges que nous préciserons plus

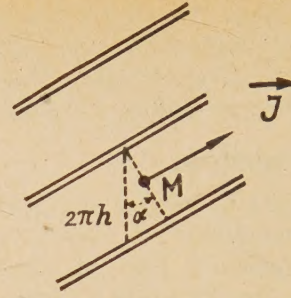


FIG. II-1. — Étalement du courant sur la couche.

loin. En particulier, la méthode de la couche continue a fourni les éléments d'une première théorie satisfaisante du tube à ondes progressives [4, 18, 19].

2° Calcul du champ.

Proposons-nous de déterminer les ondes électromagnétiques guidées à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre illimité à conductivité hélicoïdale telle qu'on vient de la définir. Conformément à la théorie générale des guides cylindriques [42] on peut exprimer le champ électromagnétique au moyen de deux vecteurs de HERTZ, électrique et magnétique $\vec{P}_E$ et $\vec{P}_H$, réduits respectivement à leur composante suivant Oz : P_E et P_H . Celle-ci satisfait à l'équation des ondes :

$$\Delta P + k^2 P = 0.$$

Supposant que les diverses grandeurs ne dépendent de la coordonnée z que par un facteur de propagation $e^{-j\beta z}$; les expressions générales des champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div } \vec{P}_E + k^2 \vec{P}_E + j\omega\mu \text{rot } \vec{P}_H \\ \vec{H} &= -(\text{grad div } \vec{P}_H + k^2 \vec{P}_H) + j\omega\epsilon \text{rot } \vec{P}_E \end{aligned}$$

permettent d'écrire les composantes semi-polaires :

$$(II-2) \quad \begin{aligned} E_r &= -j\beta \frac{\partial P_E}{\partial r} + j\omega\mu \frac{1}{r} \frac{\partial P_H}{\partial \theta} \\ E_\theta &= -j\beta \frac{1}{r} \frac{\partial P_E}{\partial \theta} - j\omega\mu \frac{\partial P_H}{\partial r} \\ E_z &= (k^2 - \beta^2) P_E. \end{aligned}$$

$$(II-3) \quad \begin{aligned} H_r &= j\beta \frac{\partial P_H}{\partial r} + j\omega\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial P_E}{\partial \theta} \\ H_\theta &= j\beta \frac{1}{r} \frac{\partial P_H}{\partial \theta} - j\omega\epsilon \frac{\partial P_E}{\partial r} \\ H_z &= -(k^2 - \beta^2) P_H. \end{aligned}$$

avec P_E et P_H solutions de l'équation :

$$(II-4) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - (\beta^2 - k^2) P = 0.$$

Posons

$$(II-5) \quad \gamma^2 = \beta^2 - k^2.$$

La constante γ est réelle pour toute onde guidée avec une vitesse de phase $v = \omega/\beta$ inférieure à la

vitesse $c = \omega/k$ des ondes libres. L'équation (4) admet alors des solutions élémentaires à variables séparées $I_n(\gamma r) e^{j n \theta}$ et $K_n(\gamma r) e^{j n \theta}$ respectivement régulières à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre conducteur. I_n et K_n sont les fonctions de BESSEL modifiées d'ordre entier n (*).

3° Solution principale.

Considérons le cas $n = 0$ où la distribution des champs est de révolution autour de l'axe Oz. Compte tenu des identités connues :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} I_0(\gamma r) &= I_1(\gamma r), \\ \frac{d}{dr} K_0(\gamma r) &= -K_1(\gamma r), \end{aligned}$$

on aura d'après (2) et (3), le facteur de propagation étant sous-entendu :

$$\begin{aligned} (II-6) \quad E_r &= -A \beta I_1(\gamma r) & H_r &= B \beta I_1(\gamma r) \\ E_\theta &= -B \omega \mu I_1(\gamma r) & H_\theta &= -A \omega \varepsilon I_1(\gamma r) \\ E_z &= j A \gamma I_0(\gamma r) & H_z &= -j B \gamma I_0(\gamma r) \end{aligned}$$

à l'intérieur du cylindre ;

$$\begin{aligned} (II-7) \quad E_r &= A' \beta K_1(\gamma r) & H_r &= -B' \beta K_1(\gamma r) \\ E_\theta &= B' \omega \mu K_1(\gamma r) & H_\theta &= A' \omega \varepsilon K_1(\gamma r) \\ E_z &= j A' \gamma K_0(\gamma r) & H_z &= -j B' \gamma K_0(\gamma r). \end{aligned}$$

à l'extérieur du cylindre.

Le raccordement des solutions intérieure et extérieure à travers la surface du cylindre va permettre de déterminer les constantes A, B, A', B' . Pour effectuer ce raccordement, exprimons d'abord la continuité du champ électrique tangentiel :

$$E_\theta^{(int)} = E_\theta^{(ext)} \quad \text{et} \quad E_z^{(int)} = E_z^{(ext)} \quad \text{pour } r = a.$$

Il vient :

$$(II-8) \quad B' K_1(\gamma a) = -B I_1(\gamma a)$$

$$(II-9) \quad A' K_0(\gamma a) = A I_0(\gamma a)$$

le champ tangentiel restant toutefois normal aux hélices lignes de courant sur le cylindre :

$$(II-10) \quad B \omega \mu I_1(\gamma a) - j A \gamma \text{tg} \alpha I_0(\gamma a) = 0.$$

Il suffit d'exprimer cette orthogonalité pour la solution intérieure, par exemple, la continuité du champ tangentiel la conserve pour la solution extérieure.

Enfin le courant superficiel J introduit une discontinuité du champ magnétique tangentiel :

$$(II-11) \quad \begin{aligned} J \cos \alpha &= -(H_z^{(ext)} - H_z^{(int)}) \\ J \sin \alpha &= H_\theta^{(ext)} - H_\theta^{(int)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$(II-12) \quad \begin{aligned} A' \omega \varepsilon K_1(\gamma a) - j B' \gamma K_0(\gamma a) \text{tg} \alpha \\ = -A \omega \varepsilon I_1(\gamma a) - j B \gamma I_0(\gamma a) \text{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Le système (8), (9), (10), (12) homogène en A, B, A', B' admettra une solution non nulle sous réserve d'une condition de compatibilité facile à obtenir et exprimée pour la première fois par PIERCE [25].

$$(II-13) \quad \gamma^2 I_0(\gamma a) K_0(\gamma a) / I_1(\gamma a) K_1(\gamma a) = k^2 \cotg^2 \alpha.$$

C'est une équation transcendante dont la solution γ fait connaître la constante de phase β et par conséquent la vitesse de l'onde guidée. Nous la discuterons plus loin.

On a alors la solution principale du problème :

a) Solution intérieure :

$$(II-14) \quad \begin{aligned} E_r &= -A \beta I_1(\gamma r) & H_r &= j A \frac{\beta \gamma \text{tg} \alpha I_0(\gamma a)}{\omega \mu I_1(\gamma a)} I_1(\gamma r) \\ E_\theta &= -j A \gamma \text{tg} \alpha \frac{I_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a)} I_1(\gamma r) & H_\theta &= -A \omega \varepsilon I_1(\gamma r) \\ E_z &= j A \gamma I_0(\gamma r) & H_z &= A \frac{\gamma^2 \text{tg} \alpha I_0(\gamma a)}{\omega \mu I_1(\gamma a)} I_0(\gamma r). \end{aligned}$$

b) Solution extérieure :

$$(II-15) \quad \begin{aligned} E_r &= A \beta \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} K_1(\gamma r) & H_r &= -j A \frac{\beta \gamma \text{tg} \alpha I_0(\gamma a)}{\omega \mu K_1(\gamma a)} K_1(\gamma r) \\ E_\theta &= -j A \gamma \text{tg} \alpha \frac{I_0(\gamma a)}{K_1(\gamma a)} K_1(\gamma r) & H_\theta &= -A \omega \varepsilon \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} K_1(\gamma r) \\ E_z &= j A \gamma \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} K_0(\gamma r) & H_z &= -A \frac{\gamma^2 \text{tg} \alpha I_0(\gamma a)}{\omega \mu K_1(\gamma a)} K_0(\gamma r). \end{aligned}$$

avec une constante arbitraire A liée évidemment aux conditions d'excitation de l'onde guidée. Discutons ces résultats.

Remarque. — Nous rattacherons plus bas la constante A à la puissance transportée par l'onde. On peut également la rattacher à l'intensité du courant qui parcourt l'hélice de la manière suivante. On porte (1), et l'une des relations (11) dans (14) et (15). Il vient :

$$(II-16) \quad \begin{aligned} A &= \frac{I}{2\pi a \omega \varepsilon} \frac{K_0(\gamma a)}{I_0(\gamma a) K_1(\gamma a) + I_1(\gamma a) K_0(\gamma a)} \\ &= (I \gamma / 2\pi \omega \varepsilon) K_0(\gamma a) = (I \eta \gamma / 2\pi k) K_0(\gamma a) \end{aligned}$$

compte tenu de l'identité ([46] p. 80) :

$$(II-17) \quad I_{n-1}(x) K_n(x) + I_n(x) K_{n-1}(x) = \frac{1}{x}.$$

Utilisant (13) et (16) on peut écrire la solution (14) sous la forme :

$$(II-18) \quad \begin{aligned} E_r &= -\frac{I \eta}{2\pi k} \beta \gamma K_0(\gamma a) I_1(\gamma r) & H_r &= j \frac{I}{2\pi} \beta \cotg \alpha K_1(\gamma a) I_1(\gamma r) \\ E_\theta &= -j \frac{I \eta}{2\pi k} k^2 \cotg \alpha K_1(\gamma a) I_1(\gamma r) & H_\theta &= -\frac{I}{2\pi} \gamma K_0(\gamma a) I_1(\gamma r) \\ E_z &= j \frac{I \eta}{2\pi k} \gamma^2 K_0(\gamma a) I_0(\gamma r) & H_z &= \frac{I}{2\pi} \gamma \cotg \alpha K_1(\gamma a) I_0(\gamma r). \end{aligned}$$

(*) Les fonctions de BESSEL modifiées jouent un rôle essentiel dans le présent travail. Comme la fonction de deuxième espèce $K_n(x)$ n'est pas définie d'une même manière par les différents auteurs, précisons que nous nous sommes conformés au traité de WATSON [48]. $K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial x} - \right]$

$\frac{\partial I_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=n}$ pour n entier. Les propriétés et les valeurs numériques utilisées ici seront exclusivement celles de cet ouvrage.

On aurait des formules analogues pour la solution extérieure (15).

4° Vitesse de l'onde guidée.

Posons dans l'équation (13) : $x = k a \cotg \alpha$, et $y = ka$; y est obtenue par inversion de la fonction :

$$x = y \sqrt{I_0(y) K_0(y)} / \sqrt{I_1(y) K_1(y)}$$

qu'il est facile d'étudier. La courbe de la figure II-2 fait connaître γa , en fonction du paramètre :

$$ka \cotg \alpha = (2\pi a/\lambda) \cotg \alpha$$

qui joue un rôle important dans les problèmes relatifs au circuit en hélice, par exemple dans la théorie du tube à ondes progressives. Ce paramètre a une valeur d'autant plus grande qu'on envisage des

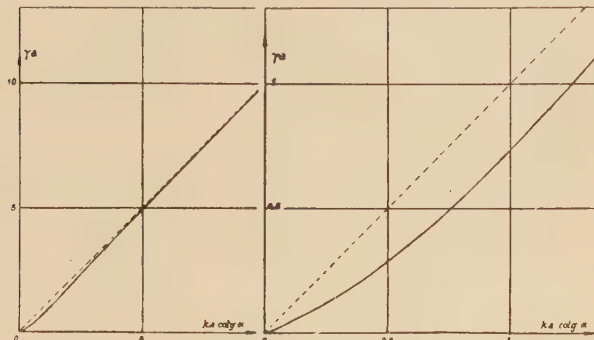


FIG. II-2. — Valeurs de γa en fonction du paramètre $ka \cotg \alpha$.

spires de plus grand diamètre, plus serrées, ou que la fréquence est plus élevée. ka est d'ailleurs la mesure en longueurs d'onde de la circonférence de la section du cylindre sur lequel est enroulée l'hélice, c'est-à-dire pratiquement, de la longueur d'une spire. On notera que γa tend rapidement vers $ka \cotg \alpha$. L'écart n'est que de 10 % dès que le paramètre atteint la valeur 3. D'ailleurs, d'une façon générale, pour des valeurs d'argument de l'ordre de quelques unités, on peut profiter des expressions asymptotiques :

$$(II-19) \quad \begin{aligned} I_n(y) &\sim e^y / \sqrt{2\pi y} \\ K_n(y) &\sim e^{-y} / \sqrt{\pi / 2y} \end{aligned}$$

qui permettent de simplifier considérablement les calculs dès qu'on se contente de résultats à quelques unités pour cent près.

En particulier, faisons : $\gamma a = ka \cotg \alpha$ dans (5) ; il vient :

$$(II-20) \quad \beta = k/\sin \alpha, \text{ ou}$$

$$(II-21) \quad v = c \sin \alpha.$$

D'où ce résultat extrêmement important : pour des valeurs suffisantes du paramètre $ka \cotg \alpha$, la vitesse de l'onde guidée est pratiquement égale à la projection sur la direction de propagation de la vitesse d'un mobile parcourant l'hélice avec la vitesse c des ondes libres.

Nous établissons ainsi l'existence d'une onde « ralentie » guidée par le circuit, justifiant l'emploi

de l'hélice dans le tube à ondes progressives. De plus la vitesse de cette onde ne dépendant pas, en première approximation tout au moins, de la fréquence, on s'explique la possibilité du fonctionnement du tube à ondes progressives sur une très large bande, propriété capitale de ce tube.

La figure II-3 montre d'une manière plus précise comment varie la vitesse v en fonction du paramètre $ka \cotg \alpha$. Ainsi pour un circuit donné, la vitesse de

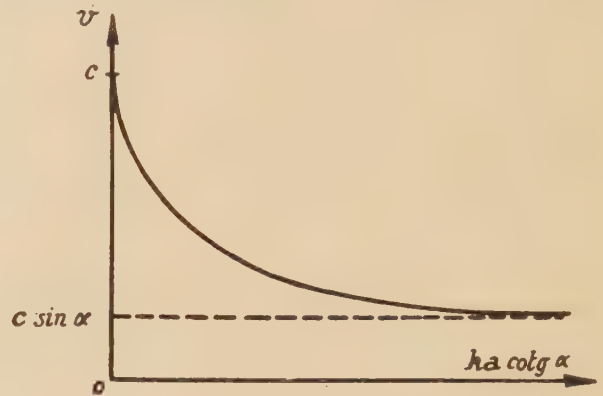


FIG. II-3. — Vitesse axiale de l'onde principale.

l'onde guidée est d'abord, aux très basses fréquences, celle des ondes libres, puis décroît rapidement vers la vitesse projetée $c \sin \alpha$, à mesure que la fréquence augmente. Il n'y a pas de régime de coupure.

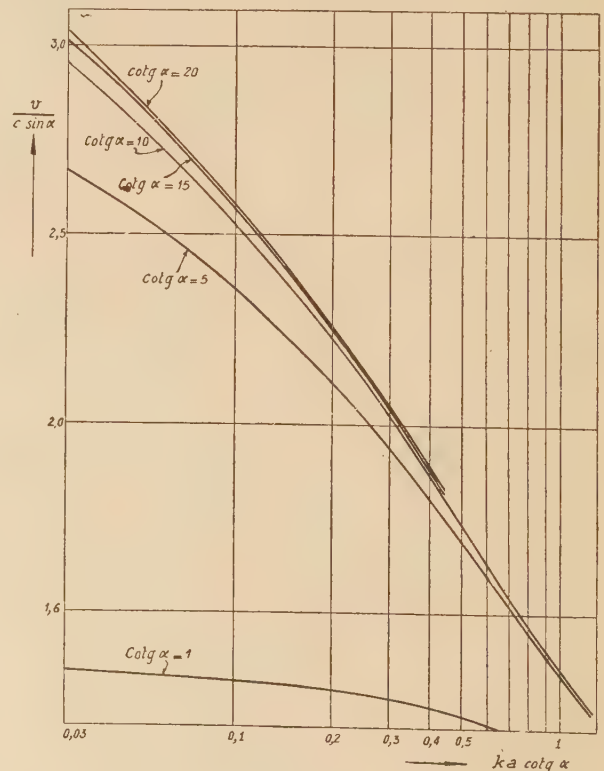


FIG. II-4. — Vitesse de l'onde principale (petites valeurs de $ka \cotg \alpha$).

Les courbes des figures II-4 et II-4 bis font connaître la vitesse v pour diverses valeurs de $\cotg \alpha$. Sur la figure II-4 on lit directement $v/c \sin \alpha$, pour les petites valeurs du paramètre $ka \cotg \alpha$. La figure

II-4 bis, relative aux grandes valeurs de $ka \cotg \alpha$, donne la correction en % à effectuer sur la vitesse projetée $c \sin \alpha$. Ces courbes sont d'un emploi rapide.

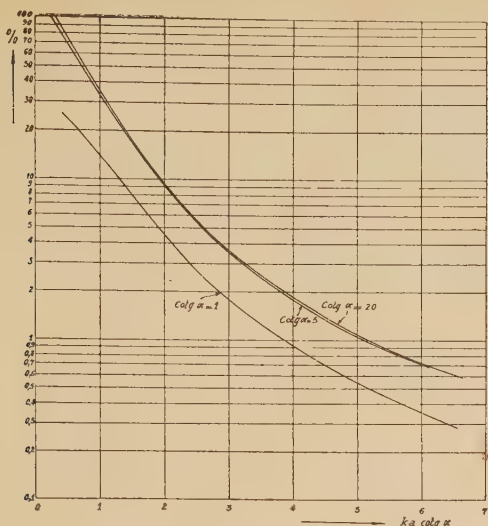


FIG. II-4 bis. — Vitesse de l'onde principale (grandes valeurs de $ka \cotg \alpha$).

Des courbes similaires ont été publiées par d'autres auteurs [4, 45]. On peut observer sur la seconde figure que, pour les petits angles α ($\alpha < 10^\circ$), la correction $c \sin \alpha$ est pratiquement indépendante de l'angle. D'ailleurs, pour les grandes valeurs de la variable $ka \cotg \alpha$ (quelques unités), il est facile d'établir l'expression approchée de la vitesse :

$$(II-22) \quad v = c \sin \alpha (1 + \sin^2 \alpha / 4k^2 a^2) \\ = c \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha / 4k^2 \alpha^2 \cotg^2 \alpha).$$

On utilise pour cela les développements asymptotiques classiques des fonctions I_n et K_n , développements dont les expressions (19) sont les premiers termes. On constate bien que si α est petit ($\cos \alpha \simeq 1$), la correction à effectuer sur $c \sin \alpha$ ne dépend que de la variable $ka \cotg \alpha$.

Pour fixer des ordres de grandeur, considérons l'hélice du tube C. N. E. T. dont les caractéristiques ont été données plus haut. Substituons à cette hélice la couche continue pour laquelle : $a = 0,29$ cm et $\cotg \alpha = 13,02$. Pour la fréquence d'emploi de 3 000 MHz on a : $ka \cotg \alpha = 2,37$. Ce dernier paramètre varierait de 2,13 à 2,61 dans une bande de 20 %. Il reste donc de l'ordre de quelques unités. La vitesse théorique de l'onde guidée vaut $0,0816 c$, ne différant de la vitesse limite $c \sin \alpha = 0,0766 c$, que de 6,5 % (l'erreur n'est que de 2 % avec la formule (22)).

Il est important d'observer que les résultats qu'on vient d'obtenir sont relatifs au problème de la couche continue. Nous examinerons ultérieurement dans quelle mesure ils sont valables pour l'hélice proprement dite, en même temps que nous discuterons les résultats expérimentaux.

5° Répartition du champ électromagnétique.

Le champ donné par (14) et (15) est, par hypothèse même, de révolution autour de l'axe Oz. Il a la symétrie de la couche continue, mais certainement

pas celle de l'hélice. Ce champ, *a priori*, ne peut donc représenter celui de l'hélice que d'une façon approchée. Comme la suite le confirmera, sa structure est cependant incomparablement plus simple et l'approximation consentie se prête beaucoup mieux à l'étude des applications. Elle permet, par exemple, d'abord raisonnablement la théorie du tube à ondes progressives, théorie unidimensionnelle lorsque le faisceau d'électrons est très fin. En effet, le champ électrique est longitudinal en tout point de l'axe. Il le reste sensiblement lorsqu'on s'écarte très peu de l'axe. On peut donc limiter une première étude à l'interaction entre le faisceau d'électrons et la composante E_z .

Les expressions (14) et (15) font connaître le champ en tout point de l'espace. Elles se simplifient considérablement lorsque le paramètre $ka \cotg \alpha$ est suffisamment grand. On peut alors prendre :

$$\beta = k / \sin \alpha \quad \text{et} \quad \gamma = k \cotg \alpha$$

d'où en utilisant (18) :

Solution intérieure approchée :

(II-23)

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{I\eta}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi a}} e^{-\gamma a} I_1(\gamma r) \\ E_\theta &= -j I\eta \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi a}} e^{-\gamma a} I_1(\gamma r) \\ E_z &= j I\eta \cotg \alpha \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi a}} e^{-\gamma a} I_0(\gamma r) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} H_r &= j \frac{I}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi a}} e^{-\gamma a} I_1(\gamma r) \\ H_\theta &= -I \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi a}} e^{-\gamma a} I_1(\gamma r) \\ H_z &= I \cotg \alpha \sqrt{\frac{\gamma}{8\pi a}} e^{-\gamma a} I_0(\gamma r) \end{aligned}$$

Solution extérieure approchée :

(II-24)

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{I\eta}{4\pi \sin \alpha} \frac{e^{-\gamma(r-a)}}{\sqrt{ar}} \\ E_\theta &= -j \frac{I\eta}{4\pi} \frac{e^{-\gamma(r-a)}}{\sqrt{ar}} \\ E_z &= j \frac{I\eta \cotg \alpha}{4\pi} \frac{e^{-\gamma(r-a)}}{\sqrt{ar}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} H_r &= j \frac{I}{4\pi \sin \alpha} \frac{e^{-\gamma(r-a)}}{\sqrt{ar}} \\ H_\theta &= \frac{I}{4\pi} \frac{e^{-\gamma(r-a)}}{\sqrt{ar}} \\ H_z &= -\frac{I \cotg \alpha}{4\pi} \frac{e^{-\gamma(r-a)}}{\sqrt{ar}} \end{aligned}$$

Étudions le champ (pour abréger, on se bornera au champ électrique) au moyen des expressions simplifiées (23) et (24). On supposera en outre que l'angle α est petit.

La figure II-5 met en évidence la variation de l'amplitude des diverses composantes avec la distance à l'axe. On en tire immédiatement deux conséquences pratiques importantes :

1° Le champ reste sensiblement longitudinal au voisinage de l'axe, propriété exploitée dans les théories unidimensionnelles du tube à ondes progressives.

2° Le champ décroît rapidement de part et d'autre de la couche conductrice. A une faible distance d de cette couche, l'atténuation du champ est de l'ordre de $ka \cotg \alpha d/a$ népers, d'où une nouvelle interprétation du paramètre $ka \cotg \alpha$, déjà rencontré dans l'étude de la vitesse. Ainsi une augmentation de la fréquence ou du rayon a de l'hélice, ou encore un resserrement des spires favorisent la concentration du champ sur la couche. D'où deux observations intéressantes. En ce qui concerne le champ extérieur,

il est, le plus souvent, inutile de blinder un circuit en hélice. Ce fait est mentionné par les expérimentateurs [5, 13]. En revanche, l'atténuation trop rapide du champ intérieur peut être une circonstance défavorable. Ainsi, dans le tube à ondes progressives,

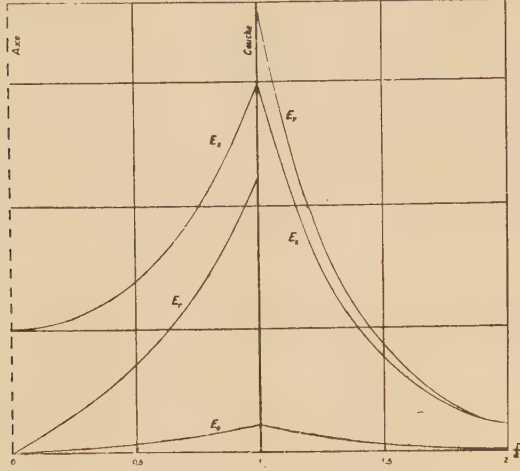


FIG. II-5. — Amplitude des composantes du champ électrique.

le champ sur l'axe, qui réagit sur le faisceau d'électrons, risque d'être trop faible. Reprenons l'exemple de la couche associée à l'hélice du tube du C. N. E. T. considéré précédemment. Le champ sur l'axe est environ le tiers du champ longitudinal sur la couche. Si le diamètre $2a$ de l'hélice était doublé l'atténuation tomberait à $1/22$. En vue du calcul d'un tube à ondes progressives, on peut interpréter le rôle des paramètres de l'hélice de la façon suivante : l'angle α régit le « ralentissement » de l'onde guidée, mais le rayon a doit être prévu aussi petit que le permet la éalisation du tube (réalisation matérielle, passage des rélectrons...) afin que le champ sur l'axe soit suffisant

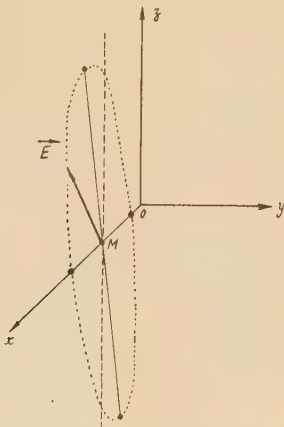


FIG. II-6. — Polarisation du champ électrique.

Les composantes du champ ne sont pas en phase. Il en résulte qu'en un point quelconque celui-ci est polarisé elliptiquement. Déplaçons-nous par exemple sur l'axe Oz à partir de O . L'angle α est supposé très petit. Il découle des expressions (23) et (24) que l'ellipse de polarisation a son petit axe porté par Oz , le grand axe restant faiblement incliné sur Oz (fig. II-6). En O , l'ellipse est réduite à une portion de l'axe Oz

(le champ est purement longitudinal), puis à mesure qu'on se déplace sur Oz elle s'ouvre de plus en plus, tend à devenir sensiblement circulaire, son plan tendant à se confondre pratiquement avec le plan normal à l'hélice au point où celle-ci rencontre Oz . En outre, l'ellipse se dilate à mesure qu'on se rapproche de la couche.

On vient d'examiner sommairement comment se comporte le champ au cours du temps en tout point de l'espace. Terminons en donnant quelques indications sur ses lignes de force, c'est-à-dire sur sa répartition dans l'espace à un instant fixé. Les lignes de champ sont données par le système :

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{\sin \alpha I_1(\gamma r) \sin(\omega t - \beta z)}{\cos \alpha I_0(\gamma r) \sin(\omega t - \beta z)}$$

à l'intérieur de la couche. On a un système analogue à l'extérieur de celle-ci. L'aspect des lignes de champ intérieures est voisin de celui du mode E_{01} du guide circulaire. Toutefois les courbes n'aboutissent pas ici normalement à la surface conductrice et elles ne sont pas planes, contrairement à une représentation qui a été donnée par nous-même [29] ou d'autres

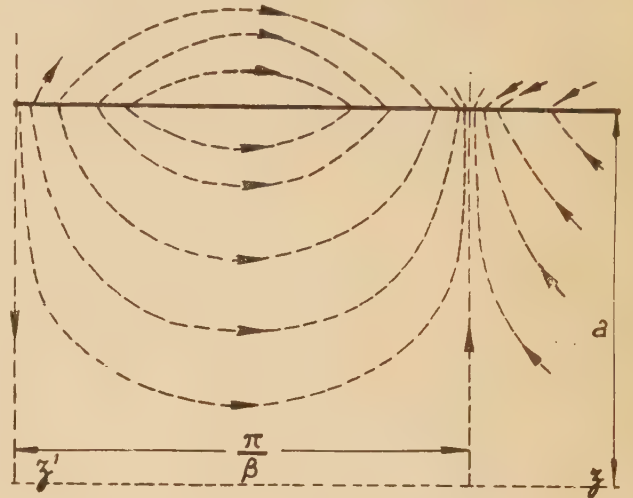


FIG. II-7. — Allure des lignes de champ électrique.

auteurs [4]. Les lignes de champ partent obliquement de la couche, se rapprochent de l'axe puis reviennent à la couche en s'enroulant lentement autour de l'axe en sens contraire à l'hélice. L'axe est une ligne de champ. L'ensemble des courbes a pour période la longueur d'onde guidée : $2\pi/\beta$ et est entraînée parallèlement à Oz avec la vitesse $v = \omega/\beta$ (fig. II-7)

6° Puissance transportée.

Les expressions générales (14) et (15) se prêtent à un calcul explicite de la puissance active transportée par l'onde grâce aux intégrales de LOMMEL :

$$\begin{aligned} \text{(II-25)} \quad & \int_0^a r I_1^2(\gamma r) dr \\ &= -a^2/2 [I_1^2(\gamma a) - (1 + 1/\gamma^2 a^2) I_1^2(\gamma a)] \\ &= a^2/2 [I_1^2(\gamma a) - I_0(\gamma a) I_2(\gamma a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (II-26) \quad & \int_a^\infty r K_1^2(\gamma r) dr \\
 &= a^2/2 [K_1^2(\gamma a) - (1 + 1/\gamma^2 a^2) K_1^2(\gamma a)] \\
 &= a^2/2 [K_0(\gamma a) K_2(\gamma a) - K_1^2(\gamma a)].
 \end{aligned}$$

Il suffit de calculer le flux du vecteur de POYNTING : $(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)/2$ à travers la totalité d'un plan de section droite. On trouve ainsi les puissances transportées à l'intérieur de la couche :

$$(II-27) \quad W^{(int)} = I^2 \eta [\beta \gamma a / 8\pi k] [K_0(\gamma a) / I_1(\gamma a)] \times [I_1^2(\gamma a) - I_0(\gamma a) I_2(\gamma a)],$$

à l'extérieur :

$$(II-28) \quad W^{(ext)} = I^2 \eta [\beta \gamma a / 8\pi k] [I_0(\gamma a) / K_1(\gamma a)] \times [K_0(\gamma a) K_2(\gamma a) - K_1^2(\gamma a)],$$

et en totalité :

$$\begin{aligned}
 (II-29) \quad W &= I^2 \eta (\beta \gamma a / 8\pi k) \{ K_0(\gamma a) I_1(\gamma a) - I_0(\gamma a) K_1(\gamma a) \\
 &+ I_0(\gamma a) K_0(\gamma a) [K_2(\gamma a) / K_1(\gamma a) - I_2(\gamma a) / I_1(\gamma a)] \}
 \end{aligned}$$

ou sous une forme plus condensée :

$$(II-30) \quad W = I^2 \eta (\beta \gamma a / 8\pi k) I_0(\gamma a) K_0(\gamma a) \times \left[\text{Log}(\gamma a)^2 \frac{I_0(\gamma a) K_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a) K_1(\gamma a)} \right].$$

Lorsque le paramètre $ka \cotg \alpha$ est assez grand, on a :

$$\begin{aligned}
 (II-31) \quad W^{(int)} &\simeq (I^2 \eta \beta / 16\pi k \gamma a) (1 - 1/2 \gamma a), \\
 W^{(ext)} &\simeq (I^2 \eta \beta / 16\pi k \gamma a) (1 + 1/2 \gamma a).
 \end{aligned}$$

La puissance guidée à l'extérieur de la couche est légèrement supérieure à la puissance guidée à l'intérieur. Les deux puissances tendent à s'égaliser toutes deux à la quantité :

$$(II-32) \quad W^{(int)} \simeq W^{(ext)} \simeq I^2 \eta / 16\pi k a \cos \alpha.$$

On peut interpréter ce résultat en le rattachant à la concentration du champ sur la couche. Supposons, par exemple, que la fréquence augmente. La totalité de l'énergie guidée se rassemble au voisinage de la couche, de part et d'autre de laquelle il y a sensiblement une répartition équivalente. En outre, pour un courant donné l'énergie transportée diminue.

On aurait pu conserver dans les calculs le facteur A des formules (14) et (15). Il aurait fallu écrire au lieu de (30) :

$$(II-33) \quad W = A^2 \frac{\pi k \beta \alpha}{\eta \gamma} \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \times \left[\text{Log}(\gamma a)^2 \frac{I_0(\gamma a) K_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a) K_1(\gamma a)} \right],$$

de telle sorte que le facteur A est directement rattaché à la puissance transportée par l'onde. Pour γa assez grand, on aurait :

$$(II-34) \quad W^{(int)} \simeq W^{(ext)} \simeq (A^2 \sin \alpha / 2 \eta \cos^2 \alpha) e^{2ka \cotg \alpha}.$$

Le facteur A lié à l'intensité du champ transporté dépend évidemment aussi bien du courant que de la puissance. D'ailleurs la proportionnalité de la puissance transportée au carré du courant suggère

l'image, devenue familière aux techniciens des communications, de la ligne de transmission. La ligne n'est qu'un schéma commode pour la résolution de certains problèmes d'ondes unidimensionnelles.

La ligne « équivalente » à l'hélice en ce qui concerne le transport de la puissance W par le courant I aurait une impédance caractéristique $Z_c = 2W/I^2$, c'est-à-dire, d'après (30) (dans l'air où $\eta = 120 \pi$) :

$$\begin{aligned}
 (II-35) \quad Z_c &= 30 (\beta \gamma a / k) I_0(\gamma a) K_0(\gamma a) \times \\
 &\quad \left[\text{Log}(\gamma a)^2 \frac{I_0(\gamma a) K_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a) K_1(\gamma a)} \right].
 \end{aligned}$$

L'expression asymptotique suivante fournit un ordre de grandeur suffisant dès que $ka \cotg \alpha$ atteint quelques unités :

$$(II-36) \quad Z_c \simeq 30 / ka \cos \alpha = 15 \lambda / \pi a \cos \alpha.$$

Ainsi aux fréquences élevées l'impédance caractéristique est inversement proportionnelle à la fréquence. Elle donne un moyen rapide d'évaluer le courant dans l'hélice.

Exemple : tube C. N. E. T. Pour $\lambda = 10$ cm, on a : $Z_c \simeq 165 \Omega$. Supposons que le circuit transporte 100 mW. Alors :

$$0,1 = 165 \times I_{\text{eff}}^2, \quad \text{d'où : } I_{\text{eff}} = 25 \text{ mA}.$$

L'analogie des lignes peut être poussée plus loin. Introduisons, comme dans la théorie classique des lignes, basée sur la propagation d'une onde transversale (dite T. E. M.), une « tension » intérieure et une « tension » extérieure définies par la circulation radiale du champ électrique :

$$(II-37) \quad V^{(int)} = - \int_0^a E_r^{(int)} dr = A \frac{\beta}{\gamma} [I_0(\gamma a) - 1]$$

$$(II-38) \quad V^{(ext)} = \int_a^\infty E_r^{(ext)} dr = A \frac{\beta}{\gamma} I_0(\gamma a).$$

La différence :

$$V^{(ext)} - V^{(int)} = A \beta / \gamma = (I \eta / 4 \pi k) \beta K_0(\gamma a)$$

est faible pour les valeurs suffisamment importantes de l'argument γa . Bornons-nous, pour simplifier, au cas asymptotique :

$$V^{(ext)} \simeq V^{(int)} = V.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 (II-39) \quad V &= (I \eta / 2 \pi k) \beta K_0(\gamma a) I_0(\gamma a) \\
 &\simeq I \eta / 4 \pi k a \cos \alpha
 \end{aligned}$$

d'où, d'après (32) et (36) :

$$\begin{aligned}
 (II-40) \quad W &= W^{(int)} + W^{(ext)} = V^2 / 2 Z_c \\
 V &= Z_c I.
 \end{aligned}$$

La « tension » V qu'on a attachée à l'onde principale guidée par la couche possède donc les mêmes propriétés que la tension ordinaire envisagée dans le cas des lignes.

7° Modes supérieurs.

La couche cylindrique est susceptible de guider d'autres ondes que celle qui correspond à la solution

principale. Mais ces solutions d'ordre supérieur possèdent une symétrie de répétition autour de l'axe Oz qui rend leur interprétation malaisée quand on revient à l'hélice proprement dite. Voici quelques indications sommaires sur ce type de solutions.

Les formules (2) et (3) permettent de dériver des vecteurs de HERTZ :

$$(II-41) \quad \begin{aligned} P_E &= A I_n(\gamma r) e^{in\theta} \\ P_H &= B I_n(\gamma r) e^{in\theta} \end{aligned}$$

le champ électromagnétique à l'intérieur de la couche :

$$(II-42) \quad \begin{aligned} E_r &= -j\beta\gamma A I_n'(\gamma r) - n\omega\mu B I_n(\gamma r)/r \\ E_\theta &= n\beta A I_n(\gamma r)/r - j\omega\mu\gamma B I_n'(\gamma r) \\ E_z &= -\gamma^2 A I_n(\gamma r) \end{aligned}$$

$$(II-43) \quad \begin{aligned} H_r &= j\beta\gamma B I_n'(\gamma r) - n\omega\varepsilon A I_n(\gamma r)/r \\ H_\theta &= -n\beta B I_n(\gamma r)/r - j\omega\varepsilon I_n'(\gamma r) \\ H_z &= \gamma^2 B I_n(\gamma r). \end{aligned}$$

On obtiendra le champ extérieur en remplaçant A, B, I_n respectivement par A', B', K_n dans les expressions écrites ci-dessus. Pour abrégier, on a sous-entendu le facteur $e^{-j(\beta z - n\theta)}$.

Les conditions aux limites conduisent, comme pour la solution principale, à un système homogène en A, B, A', B' compatible, pourvu qu'on ait :

$$(II-44) \quad \begin{aligned} (n\beta/a - \gamma^2 \operatorname{tg} \alpha)^2 I_n(\gamma a) K_n(\gamma a) \\ + k^2 \gamma^2 I_n'(\gamma a) K_n'(\gamma a) = 0. \end{aligned}$$

La condition de compatibilité (44) généralise la condition (13) à laquelle elle se réduit pour $n = 0$.

A toute racine réelle γ de l'équation transcendante (44) correspond une solution du problème. Posant, pour abrégier :

$$(II-45) \quad g_n = \pm \sqrt{-I_n(\gamma a) K_n'(\gamma a) / I_n'(\gamma a) K_n(\gamma a)},$$

on aura à un facteur : $A e^{-j(\beta z - n\theta)}$ près :

$$(II-46) \quad \begin{aligned} E_r &= -(j\gamma/2) [(\beta - kg_n) I_{n-1}(\gamma r) \\ &\quad + (\beta + kg_n) I_{n+1}(\gamma r)] \\ E_\theta &= (\gamma/2) [(\beta - kg_n) I_{n-1}(\gamma r) \\ &\quad - (\beta + kg_n) I_{n+1}(\gamma r)] \\ E_z &= -\gamma^2 I_n(\gamma r); \end{aligned}$$

$$(II-47) \quad \begin{aligned} H_r &= (\gamma/2\eta) [(\beta g_n - k) I_{n-1}(\gamma r) \\ &\quad + (\beta g_n + k) I_{n+1}(\gamma r)] \\ H_\theta &= (j\gamma/2\eta) [(\beta g_n - k) I_{n-1}(\gamma r) \\ &\quad - (\beta g_n + k) I_{n+1}(\gamma r)] \\ H_z &= (-j\gamma^2/\eta) g_n I_n(\gamma r) \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour le champ extérieur à la couche.

Revenons à la condition de compatibilité (44). Posons :

$$(II-48) \quad x = ka \quad (II-49) \quad y = \gamma a$$

et

$$(II-50) \quad f_n(\gamma a) = -I_n'(\gamma a) K_n'(\gamma a) / I_n(\gamma a) K_n(\gamma a).$$

On est conduit à l'équation transcendante :

$$(II-51) \quad (n\sqrt{x^2 + y^2} - y^2 \operatorname{tg} \alpha)^2 - x^2 y^2 f_n^2(y) = 0.$$

La vitesse de propagation de toute onde, solution du problème, est alors :

$$(II-52) \quad v = c/\sqrt{1 + y^2/x^2}.$$

Les calculs sont fastidieux, mais sans difficulté particulière. La relation (51) fournit $x(y)$ au moyen d'opérations algébriques simples, une table des valeurs de $f_n(y)$ ayant été préalablement dressée. Cette dernière fonction tend d'ailleurs rapidement vers 1. $y(x)$ sera obtenu par inversion des tables de valeurs de $x(y)$.

Nous avons traité complètement, à titre d'exemple, le cas $n = \pm 1$. Les courbes de la figure (II-8) sont relatives à l'angle α tel que $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$.

On observe les résultats suivants :

a) $n = -1$ (phase constante pour θ croissant avec $-z$).

Il existe, quel que soit ka , une seule onde ayant la structure envisagée (symétrie de sens contraire à

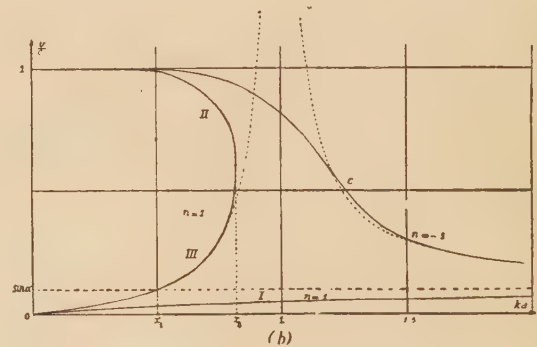
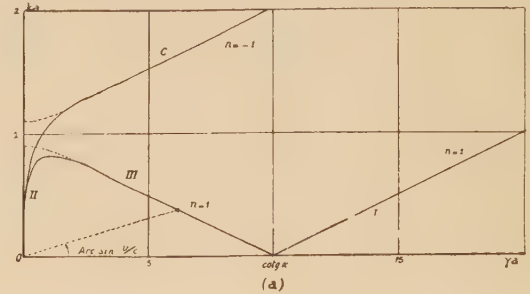


FIG. II-8. — Propagation des ondes d'ordre 1.

celle de l'hélice). Sa vitesse axiale d'abord égale à c décroît ensuite vers la vitesse projetée $c \sin \alpha$. On notera qu'elle reste longtemps très voisine de celle des ondes libres. Elle n'en diffère de plus de 10 % que vers $ka \sim 0,9$, c'est-à-dire pour des fréquences relativement élevées.

b) $n = 1$ (phase constante pour θ croissant avec z).

La seconde des figures (II-8) montre l'existence d'une valeur de coupure x_0 de la variable ka ($x_0 = 0,82$ dans l'exemple étudié) :

$ka < x_0$: 3 ondes du type envisagé (symétrie de même sens que l'hélice) peuvent être guidées par la couche continue. L'une a une vitesse inférieure à $c \sin \alpha$ (onde lente I), une autre a une vitesse supérieure à $c \sin \alpha$ (onde rapide II). La vitesse de la troisième onde (onde intermédiaire III), d'abord nulle comme celle de I, croît avec ka , et atteint pour $ka = x_0$ celle de II. Celle-ci, comme celle de l'onde

correspondant à $n = -1$, reste pratiquement égale à c jusque vers $ka = 0,5$.

$ka > x_0$: l'onde lente I subsiste seule. Sa vitesse tend vers $c \sin \alpha$ pour les grandes valeurs de ka .

Le comportement asymptotique de $f_1(y)$ permet d'obtenir une bonne expression approchée de la vitesse de l'onde lente pour toute valeur de ka :

(II-53)

$$v \simeq c \sin \alpha \frac{ka}{\sqrt{k^2 a^2 + 2ka \cos \alpha + 1}} \simeq c \sin \alpha \frac{ka}{ka + \cos \alpha}$$

L'expression :

(II-54)

$$v \simeq c \sin \alpha \frac{ka}{\sqrt{k^2 a^2 - 2ka \cos \alpha + 1}} \simeq c \sin \alpha \frac{ka}{|ka - \cos \alpha|}$$

représente la vitesse de l'onde relative à $n = -1$ d'autant mieux que ka diffère plus de $\cos \alpha$.

Comparons maintenant les intensités des champs transportés par les diverses ondes. Considérons pour fixer les idées, la composante E_z donnée par (46). Dans l'exemple considéré le rapport $(E_z)_{II}/(E_z)_I$ est au plus égal à $1,7 \cdot 10^{-4}$ au voisinage de l'axe et à la coupure x_0 . Il est encore plus petit si l'on s'éloigne de l'axe ou si la fréquence est plus basse. L'onde rapide II est donc extrêmement faible. Elle n'est pratiquement pas décelable. Au contraire, l'onde intermédiaire III peut être d'intensité comparable à celle de l'onde lente I, pourvu que l'on soit suffisamment près de l'axe et que la fréquence soit basse. Reprenons notre exemple numérique. Pour $ka = 0,1$ le rapport $(E_z)_{III}/(E_z)_I$ décroît de 0,55 à 0,1 lorsqu'on se déplace de l'axe à la surface du cylindre. Mais à la coupure $ka = x_0$ il varierait, dans les mêmes conditions, de $1,7 \cdot 10^{-4}$ à $2,3 \cdot 10^{-10}$.

Les courbes de la figure (II-8) se raccordent à des courbes en pointillé dont la signification apparaîtra au chapitre V. L'étude de l'hélice filiforme conduira à des résultats qui, comparés à ceux qu'on vient d'établir, permettront d'interpréter les modes supérieurs de la couche continue.

CHAPITRE III

CHAMP CRÉÉ SUR L'AXE PAR UN FIL FIN EN HÉLICE

1° Insuffisance de la méthode de la couche continue.

La méthode de la couche continue a l'avantage considérable de conduire à des résultats exprimés de façon explicite et simple. Elle fournit le champ électromagnétique en tout point de l'espace et se prête à un calcul facile de la puissance transportée. Elle a permis de développer une première théorie du tube à ondes progressives [4, 18]. Mais c'est une méthode approchée et a des limites qui sont la rançon même des simplifications sur lesquelles elle repose. Donnons deux exemples. On a vu que le champ sur l'axe du cylindre conducteur était pure-

ment longitudinal. Un électron se déplaçant sur cet axe n'est donc soumis à aucun effet transversal. Cet effet tel qu'il a été étudié par certains auteurs [26, 6] n'est sensible que si le faisceau axial des électrons d'un tube à ondes progressives a une section notable. Or si l'on revient à l'hélice proprement dite, la dyssymétrie du circuit rend à peu près évident le fait que le champ sur l'axe possède une petite composante transversale. Il serait intéressant d'examiner si l'effet perturbateur de cette composante est négligeable ou non. La méthode de la couche continue n'est pas capable de résoudre le problème en raison de la symétrie de révolution qu'elle suppose *a priori*.

Autre objection : la couche continue ne « rayonne » pas. Elle ne peut donc pas rendre compte, par exemple, des propriétés de l'antenne en hélice. Cependant il est intuitif que si une hélice est le siège d'une onde progressive de courant la parcourant avec la vitesse de la lumière, son fonctionnement global doit être profondément modifié si la longueur de la spire devient voisine de λ .

Une étude directe de l'hélice, susceptible de fournir des résultats qu'il serait impossible d'obtenir par la méthode de la couche continue, complètera donc utilement celle-ci. Nous ferons l'hypothèse simplificatrice que le conducteur enroulé en hélice est sans épaisseur. Il n'y aura de difficultés qu'au voisinage du fil. Nous les examinerons au chapitre V. Dans une première étude nous nous bornerons à l'étude du champ en un point quelconque de l'axe de l'hélice, étude dont les avantages sont les suivants :

1. En un point de l'axe on est suffisamment éloigné de l'hélice pour que l'approximation de fil infiniment mince soit raisonnable.
2. La symétrie du circuit autour de l'axe rend les calculs relativement élémentaires.
3. Les expressions du champ sur l'axe permettront d'étendre notre méthode de calcul du champ dans tout l'espace (chapitre V).
4. Les résultats obtenus permettent de justifier ou de corriger éventuellement la théorie unidimensionnelle du tube à ondes progressives.

2° Hypothèses.

On suppose que l'hélice illimitée (fig. III-1) :

$$(III-1) \quad r = a, \quad \zeta = h\varphi = a \operatorname{tg} \alpha \varphi$$

est le siège d'une onde de courant d'intensité :

$$J(s) e^{j\omega t}$$

où s est l'arc :

$$\widehat{AP} = (a/\cos \alpha)\varphi = \zeta/\sin \alpha.$$

L'hélice porte des charges électriques réparties avec la densité linéique $Q(s) e^{j\omega t}$ reliée au courant par la condition :

$$(III-2) \quad J'(s) + j\omega Q(s) = 0$$

qui exprime la conservation de l'électricité. Cette double distribution crée en un point quelconque

de l'espace $M(r, \theta, z)$ les potentiels scalaire et vecteur retardés :

$$(III-3) \quad \begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(s) \psi(\rho) ds \\ \vec{A}(M) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(s) \psi(\rho) d\vec{s} \end{aligned}$$

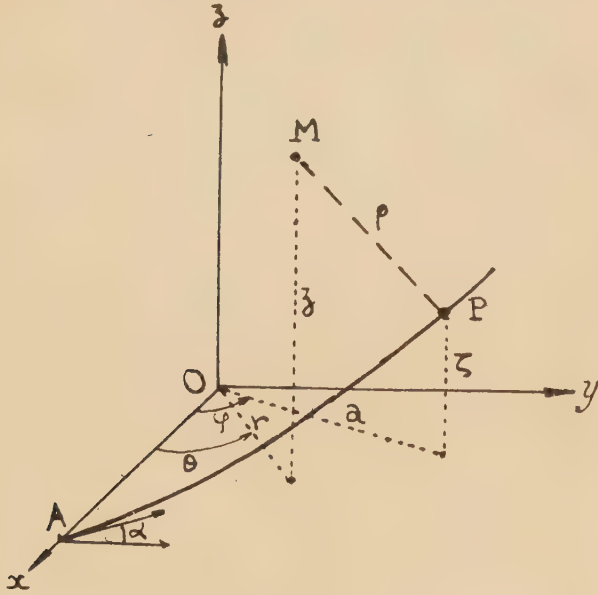


FIG. III-1. — Hélice filiforme.

où avec L. DE BROGLIE [42] on pose :

$$(III-4) \quad \psi(\rho) = e^{-jk\rho/\rho},$$

ρ distance PM du point courant sur l'hélice (a, φ, ζ) au point fixe $M(r, \theta, z)$ est donnée par :

$$(III-5) \quad \rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + (z - \zeta)^2.$$

Le champ électromagnétique dérive des potentiels par les formules :

$$(III-6) \quad \begin{aligned} \vec{E}(M) &= -\text{grad } V - \mathbf{j} \omega \mu \vec{A}, \\ \vec{H}(M) &= \text{rot } A. \end{aligned}$$

Traisons le cas de l'onde sinusoïdale de courant non atténuée :

$$(III-7) \quad \mathcal{J}(s) = I e^{-jk's}$$

d'amplitude I , se propageant le long du fil, dans le sens des arcs croissants, avec une vitesse :

$$(III-8) \quad c' = \omega/k'$$

que, pour plus de généralité, nous supposons différente de la vitesse c des ondes libres. Le problème, essentiel, de la vitesse de propagation le long du fil sera discuté plus loin (chapitre V). On se réserve ici la possibilité de tenir éventuellement compte du ralentissement des ondes du fait des pertes ohmiques ou d'un procédé artificiel (ligne de GOUBAU). On néglige toutefois l'affaiblissement possible de l'onde.

D'après (2) on aura :

$$(III-9) \quad Q(s) = (k'/\omega) I e^{-jk's},$$

d'où, en posant :

$$(III-10) \quad \beta = k'/\sin \alpha :$$

$$(III-11) \quad V(M) = \frac{I\eta}{4\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta\zeta} \psi(\rho) d\zeta$$

$$(III-12) \quad \vec{A}(M) = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta\zeta} \psi(\rho) d\vec{s}$$

ou encore :

$$(III-13)$$

$$(III-14) \quad A_r = \frac{I}{4\pi} \cotg \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta\zeta} \psi(\rho) \sin(\theta - \varphi) d\zeta$$

$$(III-15) \quad A_\theta = \frac{I}{4\pi} \cotg \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta\zeta} \psi(\rho) \cos(\theta - \varphi) d\zeta$$

$$A_z = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta\zeta} \psi(\rho) d\zeta.$$

Introduisons la notation commode :

$$(III-16) \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\zeta} \psi(\rho) d\zeta.$$

Il vient :

$$(III-17)$$

$$V = (I\eta/4\pi) (\beta/k) S(\beta)$$

$$(III-18)$$

$$(III-19) \quad A_r = \frac{I}{4\pi\mathbf{j}} \cotg \alpha \left[e^{j\theta} S\left(\beta + \frac{1}{h}\right) - e^{-j\theta} S\left(\beta - \frac{1}{h}\right) \right]$$

$$(III-20) \quad A_\theta = \frac{I}{4\pi} \cotg \alpha \left[e^{j\theta} S\left(\beta + \frac{1}{h}\right) + e^{-j\theta} S\left(\beta - \frac{1}{h}\right) \right]$$

$$A_z = (I/4\pi) S(\beta).$$

3° Expressions des potentiels sur l'axe.

Lorsque le point M est situé sur l'axe Oz ($r = 0$) on peut calculer explicitement l'intégrale de (16) Le calcul est fait plus loin, en Annexe.

$$(III-21) \quad S(\omega) = 2 e^{-j\omega z} K_0(a\sqrt{\omega^2 - k^2}).$$

Le repère attaché à M est alors indéterminé. Fixons-le de façon que la composante en r rencontre l'hélice : $z = h\theta$. Autrement dit, lorsque M décrit l'axe, le repère attaché à M est animé d'un mouvement hélicoïdal guidé par l'hélice.

Introduisons une quantité γ_n qui jouera un rôle très important aux chapitres suivants :

$$(III-22) \quad \gamma_n = (n/h - \beta)^2 - k^2;$$

on aura les expressions explicites suivantes :

$$(III-23) \quad V = I(\eta/2\pi) (\beta/k) K_0(a\gamma_0) e^{-j\beta z}$$

$$(III-24) \quad A_r = -\frac{I}{4\pi\mathbf{j}} \cotg \alpha [K_0(a\gamma_1) - K_0(a\gamma_{-1})] e^{-j\beta z}$$

$$(III-25) \quad A_\theta = \frac{I}{4\pi} \cotg \alpha [K_0(a\gamma_1) + K_0(a\gamma_{-1})] e^{-j\beta z}$$

$$(III-26) \quad A_z = (I/2\pi) K_0(a\gamma_0) e^{-j\beta z}.$$

Les potentiels se propagent le long de l'axe avec la vitesse

$$(III-27) \quad \omega/\beta = \omega \sin \alpha / k' = c' \sin \alpha$$

projection de la vitesse le long du fil. La symétrie hélicoïdale de leur répartition est masquée ici par le choix du repère mobile.

4° Calcul des champs sur l'axe.

Les champs sont donnés par les expressions (6). La composante E_z s'obtient immédiatement à partir de (23) et (26) :

$$(III-28) \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} - j k \eta A_z \\ = j \frac{I \eta \beta^2 - k^2}{2\pi k} e^{-j\beta z} K_0(a\gamma_0).$$

Le calcul des autres composantes, sans être aussi simple, ne soulève toutefois aucune difficulté sérieuse.

a) Champ électrique :

On a :

$$(III-29) \quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - j k \eta A_r.$$

Partant de (16) et (17), on a :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{I \eta \beta}{4\pi k} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta z} \psi(\rho) d\zeta \\ = \frac{I \eta \beta}{4\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta z} \psi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial r} d\zeta.$$

Or, d'après (5) :

$$\partial \rho / \partial r = [r - a \cos(\theta - \varphi)] / \rho$$

donc sur l'axe ($r = 0$) :

$$\partial \rho / \partial r = -a \cos(\theta - \varphi) / \rho.$$

En posant :

$$(III-30) \quad T(\omega, k) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \zeta} \frac{\psi'(\rho)}{\rho} d\zeta,$$

il vient immédiatement :

$$(III-31) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{I \eta \beta a}{8\pi k} \left[e^{j\theta} T\left(\beta + \frac{1}{h}, k\right) + e^{-j\theta} T\left(\beta - \frac{1}{h}, k\right) \right].$$

On trouvera en Annexe le calcul de l'intégrale :

$$(III-32) \quad T(\omega, k) = (2/a) e^{-j\omega z} \sqrt{\omega^2 - k^2} K_1(a\sqrt{\omega^2 - k^2}).$$

Portons alors (32) et (24) dans (30) ; il vient :

$$(III-33) \quad E_r = (I \eta / 4\pi k) e^{-j\beta z} \{ k^2 \cotg \alpha [K_0(a\gamma_1) - K_0(a\gamma_{-1})] - \beta [\gamma_1 K_1(a\gamma_1) + \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1})] \}.$$

Le calcul de : $E_\theta = -(1/r) \partial V / \partial \theta - j k \eta A_\theta$ est en tous points analogue. On a sur l'axe :

$$(III-34) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{I \eta \beta a}{8\pi j k} \left[e^{j\theta} T\left(\beta + \frac{1}{h}, k\right) - e^{-j\theta} T\left(\beta - \frac{1}{h}, k\right) \right]$$

$$(III-35) \quad = \frac{I \eta \beta}{4\pi j k} e^{-j\beta z} [\gamma_1 K_1(a\gamma_1) - \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1})]$$

et enfin :

$$(III-36) \quad E_\theta = -j (I \eta / 4\pi k) e^{-j\beta z} \{ k^2 \cotg \alpha [K_0(a\gamma_1) + K_0(a\gamma_{-1})] - \beta [\gamma_1 K_1(a\gamma_1) - \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1})] \}.$$

b) Champ magnétique.

Le calcul des expressions :

$$(III-37) \quad H_r = (1/r) \partial A_z / \partial \theta - \partial A \theta / \partial z \\ H_\theta = \partial A r / \partial z - \partial A z / \partial r \\ H_z = (1/r) \partial (r A \theta) / \partial r - (1/r) \partial A r / \partial \theta$$

est effectué comme précédemment en veillant, toutefois, à prendre les dérivées des composantes de

→
A sur le repère naturel, c'est-à-dire θ et z restant indépendants. Considérant ensuite le point M sur l'axe ; on lui attachera le repère mobile défini par l'équation de liaison : $z = h\theta$.

(A)

$$E_r = (I \eta / 4\pi k) e^{-j\beta z} \{ k^2 \cotg \alpha [K_0(a\gamma_1) - K_0(a\gamma_{-1})] - \beta [\gamma_1 K_1(a\gamma_1) + \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1})] \} \\ E_\theta = -j (I \eta / 4\pi k) e^{-j\beta z} \{ k^2 \cotg \alpha [K_0(a\gamma_1) + K_0(a\gamma_{-1})] - \beta [\gamma_1 K_1(a\gamma_1) - \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1})] \} \\ E_z = j (I \eta / 2\pi k) e^{-j\beta z} \gamma_0^2 K_0(a\gamma_0) \\ H_r = j \frac{I}{4\pi} e^{-j\beta z} \left\{ \cotg \alpha \left[\left(\beta - \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_1) + \left(\beta + \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_{-1}) \right] - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) + \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1}) \right\} \\ H_\theta = \frac{I}{4\pi} e^{-j\beta z} \left\{ \cotg \alpha \left[\left(\beta - \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_1) - \left(\beta + \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_{-1}) \right] - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) - \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1}) \right\} \\ H_z = \frac{I}{2\pi} e^{-j\beta z} \cotg \alpha \gamma_0 K_1(a\gamma_0).$$

Ces formules mettent en évidence la propagation des champs le long de l'axe Oz avec la vitesse projetée $c' \sin \alpha$ et, compte tenu du choix du repère, la symétrie hélicoïdale de leur distribution.

Si l'on admet que l'onde de courant se propage le long du fil avec la vitesse de la lumière c , les expressions des composantes du champ deviennent :

(B)

$$E_r = \frac{I \eta}{4\pi \sin \alpha} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} \{ k \cos \alpha [K_0(a\gamma_1) - K_0(a\gamma_{-1})] - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) - \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1}) \} \\ E_\theta = -j \frac{I \eta}{4\pi \sin \alpha} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} \{ k \cos \alpha [K_0(a\gamma_1) + K_0(a\gamma_{-1})] - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) + \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1}) \} \\ E_z = j \frac{I \eta}{2\pi} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} k \cotg^2 \alpha K_0(ka \cotg \alpha) \\ H_r = j \frac{I}{4\pi} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} \left\{ \cotg \alpha \left[\left(\frac{k}{\sin \alpha} - \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_1) + \left(\frac{k}{\sin \alpha} + \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_{-1}) \right] - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) + \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1}) \right\} \\ H_\theta = \frac{I}{4\pi} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} \left\{ \cotg \alpha \left[\left(\frac{k}{\sin \alpha} - \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_1) - \left(\frac{k}{\sin \alpha} + \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_{-1}) \right] - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) - \gamma_{-1} K_1(a\gamma_{-1}) \right\} \\ H_z = \frac{I}{2\pi} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} k \cotg^2 \alpha K_1(ka \cotg \alpha)$$

avec :

$$\gamma_{\pm 1}^2 = (k / \sin \alpha \mp 1/h)^2 - k^2$$

ou :

$$(III-38) \quad a\gamma_{\pm 1} = \cotg \alpha \sqrt{k^2 a^2 \mp (2ka / \cos \alpha) + 1}.$$

La quantité $a\gamma_0$ se réduit alors au paramètre $ka \cotg \alpha$, rencontré au chapitre II.

Lorsque l'angle α est petit, comme c'est le cas à peu près général, on a sensiblement :

$$(III-39) \quad a\gamma_{\pm 1} \simeq \cotg \alpha |ka \mp 1|.$$

5° Discussion des résultats.

a) COMPARAISON DES CHAMPS DE L'HÉLICE ET DE LA COUCHE CONTINUE.

En tout point de l'axe de la couche continue on a les composantes obtenues en faisant $r=0$ dans (II-18) et restituant le facteur de propagation $e^{-i\beta z}$:

$$(C) \quad \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\theta &= 0 \\ E_z &= j(I\eta/2\pi) e^{-i\beta z} (\gamma^2/k) K_0(a\gamma) \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \\ H_z &= (I/2\pi) e^{-i\beta z} \cotg \alpha \gamma K_1(a\gamma). \end{aligned}$$

Dans ces formules γ est solution de l'équation transcendante (II-13) et β s'en déduit par la relation : $\beta = \sqrt{\gamma^2 + k^2}$.

Dans les formules du tableau A, $\beta = k'/\sin \alpha$ et γ_0 s'en déduit par la relation : $\gamma_0 = \sqrt{\beta^2 - k^2}$.

Les deux points de vue coïncident lorsque le paramètre $ka \cotg \alpha$ est suffisamment grand et que la propagation le long du fil a pour vitesse c .

La différence essentielle entre les résultats exprimés par les tableaux (A) et (C) est que les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sur l'axe de la couche sont polarisés rectili-

continue, la constante de phase le long du fil : $k' = \beta \sin \alpha < k$. Mais c'est là un artifice pour accorder quantitativement les solutions de deux problèmes voisins mais distincts.

Exemple. — Reprenons l'exemple du chapitre II, celui de l'hélice du tube CNET ($a = 0,29$ cm, $\cotg \alpha = 13,02$) à la fréquence 3 000 MHz. La théorie de la couche continue conduit à une vitesse axiale égale à 0,0816 c , supérieure de 6,5 % à la vitesse limite correspondante : $c \sin \alpha = 0,0766 c$. Si le fil de l'hélice était infiniment mince cette dernière vitesse représenterait rigoureusement la vitesse de propagation du champ sur l'axe. Pour que l'hélice filiforme et la couche continue produisent des champs E_z ou H_z égaux en tout point de l'axe il suffit de supposer que l'hélice est parcourue par l'onde de courant à une vitesse supérieure de 6,5 % à la vitesse de la lumière.

b) DISCUSSION DU CHAMP ÉLECTRIQUE.

On se bornera au cas $c' = c$.

1° Composante longitudinale E_z .

Elle varie comme la quantité $k \cotg^2 \alpha K_0(ka \cotg \alpha)$. Les courbes des figures III-2, III-3, III-4 montrent son comportement lorsque les paramètres géométriques de l'hélice a , α , et la fréquence $ck/2\pi$, varient séparément.

On suppose que les conditions d'excitation sont

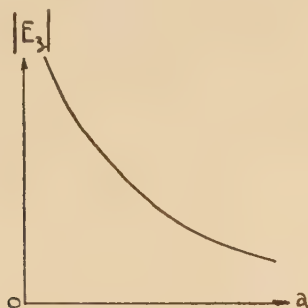


FIG. III-2.
Rôle du rayon de l'hélice.

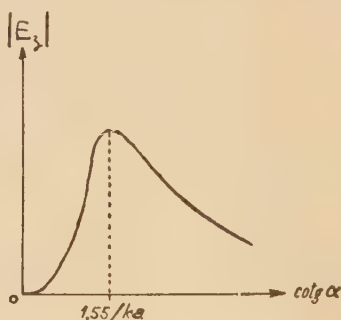


FIG. III-3.
Rôle de l'inclinaison des spires.

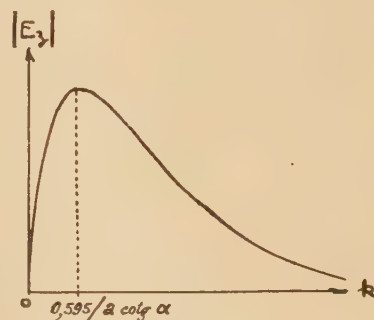


FIG. III-4.
Rôle de la fréquence.

gnement le long de l'axe. Au contraire les champs de l'hélice infiniment mince sont polarisés elliptiquement, l'ellipse de polarisation étant entraînée par le mouvement hélicoïdal du repère mobile. En ce qui concerne les composantes suivant Oz, la concordance des résultats est frappante. Elle n'est cependant que formelle si l'on admet une vitesse de propagation le long du fil égale à la vitesse de la lumière, propriété qu'on justifiera plus loin. Les valeurs numériques des composantes, leurs vitesses de propagation ne sont pas égales, ce dont il n'y a pas lieu de s'étonner puisqu'on étudie deux circuits différents. Toutefois la solution du problème de la couche tend vers celle de l'hélice filiforme à mesure que le paramètre $ka \cotg \alpha$ augmente.

On pourrait identifier complètement les résultats en convenant d'accroître la vitesse de propagation le long du fil. Il suffirait, en effet, d'associer à la constante de phase axiale relative à la couche

telles que le courant I reste le même. Le rôle du rayon a est évident. Le champ sur l'axe décroît très rapidement lorsque a augmente et l'importance du résultat pour le calcul des hélices des tubes à ondes progressives a déjà été signalée au chapitre II.

La figure (III-3) montre l'existence d'une inclinaison optimum ($ka \cotg \alpha = 1,552$) ; mais cette propriété n'est guère exploitable dans la pratique, car l'angle α commande la réduction de vitesse qu'on peut avoir en vue. Pour fixer les idées, indiquons que le champ maximum serait obtenu à la fréquence 3 000 MHz pour une hélice de rayon $a = 0,29$ cm et $\cotg \alpha = 8,51$, donc plus lâche que celle du tube CNET. Cette dernière donne un champ égal à $0,85|E_z|_{\max}$.

Le résultat le plus intéressant est celui de la figure (III-4) où une hélice donnée est étudiée à fréquence variable. Il existe une fréquence optimum définie par $ka \cotg \alpha = 0,595$. Ainsi pour le tube CNET on

aurait $\lambda_{\text{opt}} = 3,98$ cm. Le champ dans les conditions d'emploi de ce tube ($\lambda = 10$ cm) n'est plus que 37 % du champ optimum.

2° Composante transversale.

Elle est définie par les expressions de E_r et E_θ du tableau (B). Elle est généralement polarisée elliptiquement et sa discussion est régie par le comportement des deux paramètres $a\gamma_1$ et $a\gamma_{-1}$. Pour abréger

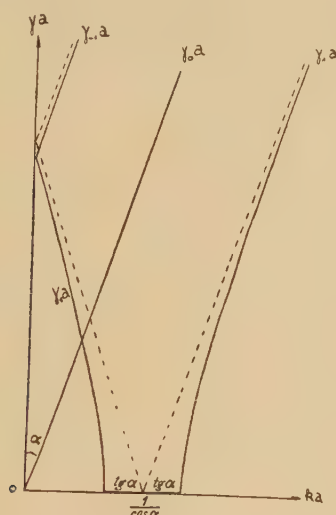


FIG. III-5. — Comportement du paramètre $\gamma_n a$.

cette discussion on se bornera à l'étude d'une hélice donnée (par a et α) à fréquence variable. La variable sera la quantité sans dimensions ka . On continue à supposer que l'hélice est, chaque fois, le siège d'une onde de courant d'intensité fixée I et de vitesse c le long du fil.

La figure III-5 (où aucune échelle n'est respectée pour la clarté du dessin) montre comment varient les paramètres $a\gamma$. Supposant α petit, on voit que $\gamma_{-1} a$ croît très vite au-delà de la valeur déjà grande $\cotg \alpha$ et que $\gamma_1 a$ cesse d'être réel dans la bande

étroite :

$$1/\cos \alpha - \tg \alpha < ka < 1/\cos \alpha + \tg \alpha$$

où la longueur de la spire est très voisine de la longueur d'onde.

Par conséquent, en dehors du cas des très basses fréquences, où le champ transversal se réduit à E_r ,

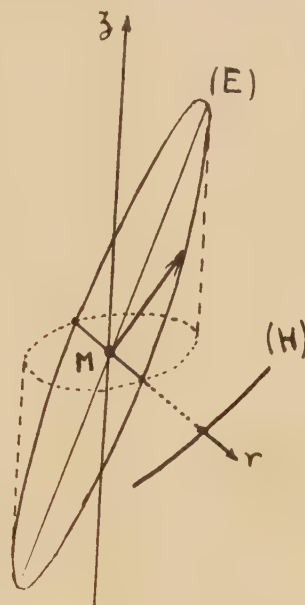


FIG. III-6. — Polarisation du champ électrique.

c'est-à-dire rencontre l'hélice, on peut négliger les termes en $K(a\gamma_{-1})$. De la sorte, les expressions :

$$(III-40) \quad E_r = j E_\theta \\ = \frac{I \eta}{4 \pi \sin \alpha} e^{-j \frac{h}{\sin \alpha} z} [k \cos \alpha K_0(a\gamma_1) - \gamma_1 K_1(a\gamma_1)]$$

représentent de façon suffisamment précise le champ transversal. La vibration transversale du champ d'une hélice à spires serrées est donc pratiquement circulaire, ce que la symétrie du circuit rend parfaitement intuitif.

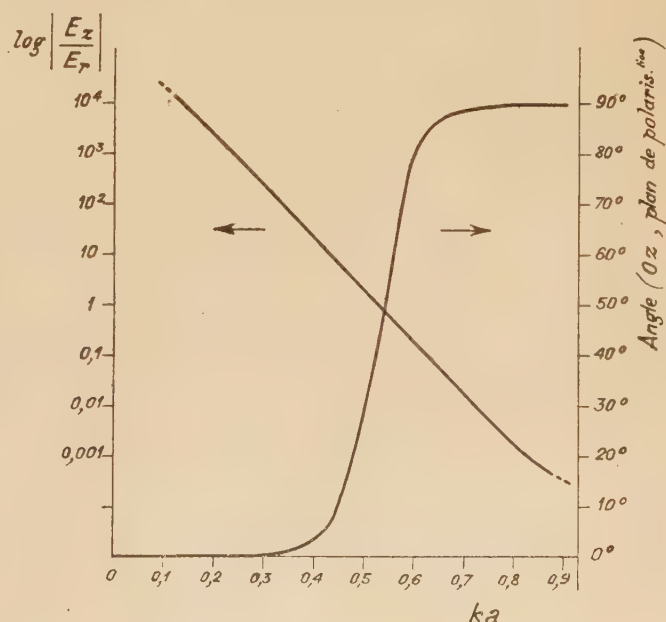
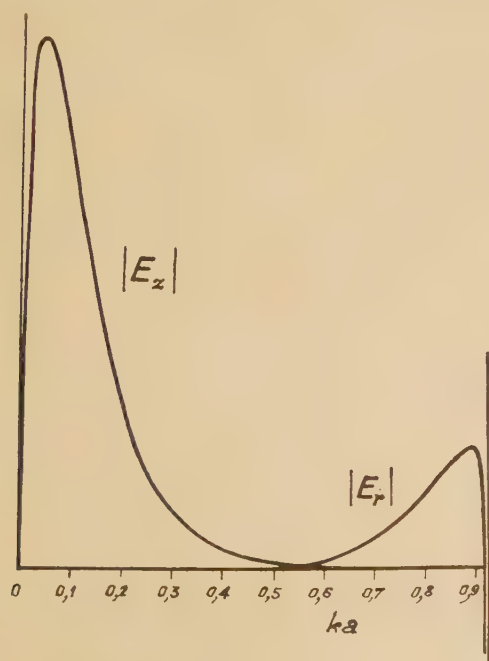


FIG. III-7. — Variation du champ électrique avec la fréquence.

Le champ électrique $\vec{E}$ proprement dit est alors polarisé suivant une ellipse dont un des axes est porté par l'axe M_r du repère mobile et qui est tracée sur un cylindre circulaire d'axe Oz (fig. I)II-6.

En s'aidant des courbes de la figure III-7 valables pour des hélices à spires serrées (elles ont été calculées pour l'angle de l'hélice du tube CNET), on peut décrire les phénomènes de la manière suivante :

a) en régime continu le champ électrique se

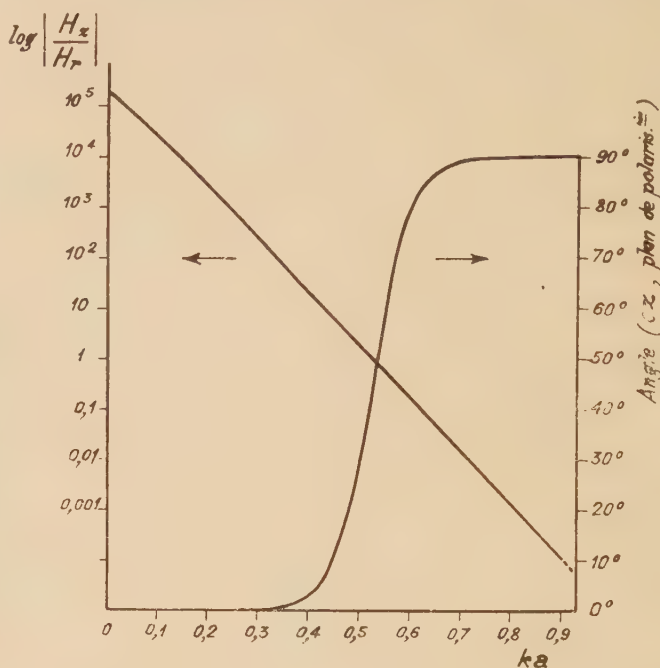
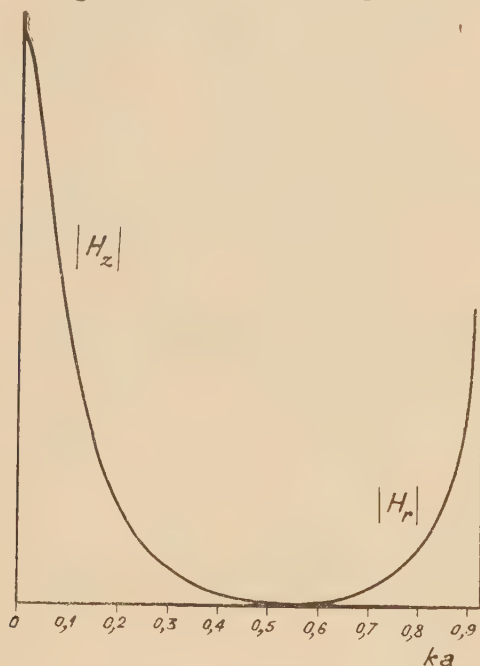


FIG. III-8. — Variation du champ magnétique avec la fréquence.

réduit à une très petite composante E_r , statique, portée par la normale commune à l'axe Oz en M et à l'hélice ;

b) la fréquence croissant on a presque immédiatement un champ polarisé suivant une ellipse extrêmement allongée et presque complètement couchée sur l'axe Oz . Cela signifie pratiquement que la composante transversale du champ est négligeable ;

c) vers la valeur $ka = 0,4$ (spire voisine de la demi-onde) l'ellipse bascule rapidement et tend à devenir un cercle normal à l'axe. Au delà de $ka = 0,6$ on peut dire que la composante transversale, polarisée quasi circulairement, est devenue prédominante et augmente avec la fréquence ;

d) au voisinage immédiat de la valeur critique $ka = 1/\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$, le phénomène se complique sans présenter un grand intérêt pratique. Le plan de polarisation s'incline très rapidement sur l'axe, passe de l'autre côté pour redevenir normal à l'axe lorsque la valeur critique est atteinte, avec variation corrélative de l'ellipse de polarisation.

Pour résumer brièvement la discussion on peut dire lorsque, tous les autres paramètres étant fixés, la fréquence croît jusqu'à une valeur critique pour laquelle la spire est voisine de la longueur d'onde, l'hélice filiforme possède deux régimes à large bande :

α) un régime « basse fréquence » à champ pratiquement longitudinal,

β) un régime « haute fréquence » à champ pratiquement transversal polarisé circulairement,

γ) les deux régimes sont séparés par une étroite bande de transition dans laquelle la longueur de la spire reste voisine de $\lambda/2$.

δ) le régime B. F. succède à un régime quasi statique et le régime H. F. est suivi par un régime critique, tous deux à bande extrêmement étroite.

Exemples. — 1. L'hélice du tube CNET permettra de fixer quelques valeurs numériques. La fréquence

moyenne pour laquelle le tube est prévu (3 000 MHz) correspond à $ka = 0,18$. L'hélice du tube à ondes progressives fonctionne donc en « basse fréquence ». Le champ transversal est alors complètement négligeable ($|E_z/E_r| \sim 3\,400$) de sorte qu'un électron parcourant l'axe n'est pas soumis à l'action d'un effet perturbateur transversal, contrairement à l'affirmation de SOLLFREY [36]. Le champ transversal ne serait égal à la composante longitudinale qu'à la fréquence 8 750 MHz. (la fréquence critique est ici : 15 430 MHz). A 7 000 MHz le champ transversal n'est encore que 10 % du champ longitudinal.

2. Les hélices en régime haute fréquence, c'est-à-dire avec champ circulaire, se rencontrent dans l'antenne en hélice.

c) DISCUSSION DU CHAMP MAGNÉTIQUE.

Bornons-nous à l'étude du rôle de la fréquence. La discussion est tout à fait analogue à celle du champ électrique, mais les résultats sont plus simples (fig. III-8).

La composante H_z décroît rapidement à partir de la valeur :

$$(III-41) \quad (H_z)_{ka=0} = (I/2\pi a) \cotg \alpha = I/2\pi h.$$

Comme l'inverse du pas de l'hélice $2\pi h$ n'est autre que le nombre de spires n_1 par unité de longueur sur la génératrice du cylindre, on retrouve en (III-41) l'expression bien connue $n_1 I$ du champ magnétique

sur l'axe d'un solénoïde en régime continu ou quasi stationnaire. Or ce résultat est établi dans les Cours de Physique, dans l'hypothèse d'un enroulement à spires jointives. Nous voyons ici qu'il reste valable quel que soit le pas de l'hélice. On peut même étendre le résultat au cas du solénoïde basse fréquence en introduisant un terme correctif facile à déduire du développement de la fonction $K_1(x)$:

(III-42)

$$|H_z| = n_1 I \left\{ 1 + [(ka \cotg \alpha)^2 / 2] [\text{Log}(ka \cotg \alpha) - 0,616] \right\}.$$

En régime continu il existe une composante transversale :

(III-43)

$$H_0 = -(I/2\pi a) \cotg \alpha [\cotg \alpha K_0(\cotg \alpha) + K_1(\cotg \alpha)]$$

(III-44)

$$= (I/2\pi a) \cotg^2 \alpha K_1(\cotg \alpha)$$

d'autant plus négligeable que l'angle α est petit. Le rapport :

$$(III-45) \quad |H_0/H_z| = \cotg \alpha K_0(\cotg \alpha) + K_1(\cotg \alpha)$$

de l'ordre de l'unité pour $\alpha = 45^\circ$ (hélice étirée) tombe à 10^{-5} pour les hélices des tubes à ondes progressives et pratiquement à 0 pour les solénoïdes usuels.

La fréquence augmentant, on peut prendre :

$$(III-46) \quad H_0 = -j H_r = \frac{I}{4\pi} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} \left[\cotg \alpha \left(\frac{k}{\sin \alpha} - \frac{1}{h} \right) K_0(a\gamma_1) - \gamma_1 K_1(a\gamma_1) \right].$$

Le champ transversal est donc circulaire. Son intensité croît avec la fréquence.

Le champ magnétique proprement dit est polarisé elliptiquement suivant une ellipse disposée comme celle du champ électrique. On retrouve un régime basse fréquence à ellipse très allongée presque couchée sur l'axe Oz et un régime haute fréquence à polarisation quasi circulaire normale à cet axe. D'ailleurs, pour des hélices à faible angle α on constate que les plans des ellipses électrique et magnétique restent sensiblement confondus sur la presque totalité de l'intervalle de fréquence considéré. On peut vérifier que, dans le cas de l'hélice du tube CNET, l'angle des deux plans n'excède pas un demi-degré, les deux plans s'échangeant dans la bande de transition. Précisons enfin qu'à chaque instant les champs transversaux, électrique et magnétique, restent pratiquement orthogonaux.

ANNEXE DU CHAPITRE III

CALCUL D'INTÉGRALES DÉFINIES

1° Calcul de $S(w)$. — Lorsque M est sur l'axe, on a :

$$(1) \quad S(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw\zeta} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} d\zeta$$

avec :

$$(2) \quad \rho^2 = a^2 + (z - \zeta)^2.$$

Introduisons :

$$(3) \quad u = \zeta - z$$

cote de P relative à M. Alors :

$$(4) \quad S(w) = e^{jwz} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j(wu + k\rho)}}{\rho} du$$

avec :

$$(5) \quad \rho^2 = a^2 + u^2.$$

Supposant $|w| > k$, on fait le changement de variable :

$$(6) \quad \rho + u = a(\sqrt{w^2 - k^2}/\sqrt{w^2 + k^2}) e^\tau$$

τ croît de $-\infty$ à $+\infty$ en même temps que u . Il vient :

$$(7) \quad S(w) = 2 e^{jwz} \int_0^\infty \cos(a\sqrt{w^2 - k^2} \text{sh } \tau) d\tau,$$

d'où d'après WATSON [48] (p. 183 ; formule 14) :

$$(8) \quad S(w) = 2 e^{jwz} K_0(a\sqrt{w^2 - k^2})$$

où K_0 est la fonction de BESSEL modifiée de seconde espèce, d'ordre 0.

Lorsque $|w| < k$, on peut poser :

$$(9) \quad \rho + u = a(\sqrt{k^2 - w^2}/\sqrt{k^2 + w^2}) e^\tau;$$

alors :

$$(10) \quad S(w) = 2 e^{jwz} \int_0^\infty e^{-ja\sqrt{k^2 - w^2} \text{ch } \tau} d\tau,$$

d'où, d'après WATSON (p. 180, formule 11) :

$$(11) \quad S(w) = -j\pi e^{jwz} H_0^{(2)}(a\sqrt{k^2 - w^2})$$

où $H_0^{(2)}$ est la 2^{me} fonction de HANKEL d'ordre 0.

Les expressions (8) et (9) sont équivalentes en raison de l'identité :

$$(12) \quad K_0(jx) = -\pi j H_0^{(2)}(x)/2.$$

On peut donc ne conserver que (8) puisqu'on sait donner un sens à la fonction K_0 d'argument imaginaire pur.

2° Calcul de $T(w, k)$.

Soit :

$$(13) \quad T(w, k) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw\zeta} \frac{\psi'(\rho)}{\rho} d\zeta$$

$$(14) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw\zeta} \frac{1 + jk\rho}{\rho^3} e^{-jk\rho} d\zeta$$

avec $\rho^2 = a^2 + (z - \zeta)^2$ lorsque M est sur l'axe.

On vérifie immédiatement, en dérivant sous le signe $\int$ par rapport au paramètre k :

$$(15) \quad \frac{\partial T}{\partial k} = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw\zeta} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} d\zeta = k S(w) \\ = 2k e^{-jwz} K_0(a\sqrt{w^2 - k^2}).$$

Alors :

(16)

$$T(\omega, k) - T(\omega, 0) = 2 e^{-j\omega z} \int_0^k k K_0(a\sqrt{\omega^2 - k^2}) dk$$

$$= (2/a) e^{-j\omega z} [\sqrt{\omega^2 - k^2} k_1(a\sqrt{\omega^2 - k^2}) - \omega K_1(a\omega)],$$

l'intégration étant immédiate par rapport à la variable $\sqrt{\omega^2 - k^2}$. D'un autre côté, en faisant $k = 0$ dans (14), on a :

(17)

$$T(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega \zeta}}{\rho^3} d\zeta = e^{-j\omega z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega u}}{(a^2 + u^2)^{3/2}} du$$

où u est défini par (3). On reconnaît la transformée de FOURIER de la fonction $1/(a^2 + u^2)^{3/2}$ (voir par exemple MAGNUS [44], p. 118) :

$$(18) \quad T(\omega, 0) = 2 e^{-j\omega z} \omega K_1(a\omega)/a.$$

Il reste alors :

$$(19) \quad T(\omega, k) = (2/a) e^{-j\omega z} \sqrt{\omega^2 - k^2} K_1(a\sqrt{\omega^2 - k^2}).$$

CHAPITRE IV

ONDES HÉLICOÏDALES

1. Circuits hélicoïdaux.

Le symbole $(\mathcal{H})$ désignera, pour abréger, tout déplacement hélicoïdal d'axe Oz et de pas h donné.

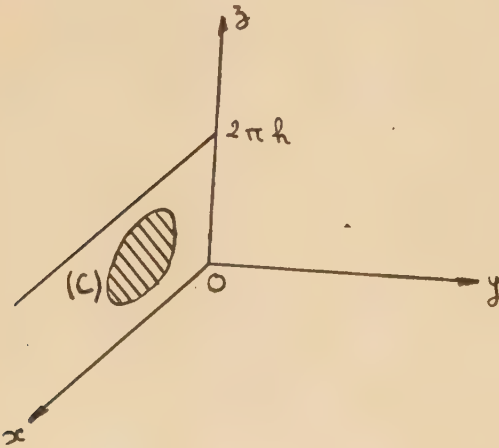


FIG. IV-1. — Base d'un fil épais enroulé en hélice.

Le fil enroulé en hélice, étudié dans les chapitres précédents, est un cas particulier de circuit hélicoïdal, c'est-à-dire superposable à lui-même par $(\mathcal{H})$. Les hélicoïdes qui limitent de tels circuits sont définis à partir de contours convenables plans ou gauches, entraînés dans un mouvement hélicoïdal associé à $(\mathcal{H})$. On pourra par exemple considérer la base (C) dans la bande :

$$x > 0 \quad 0 < z < 2\pi h$$

du plan xOz .

Le profil de la figure IV-1 engendre le circuit constitué par un conducteur ordinaire de section

(C) qu'on aurait « enroulé en hélice ». Le profil (C_1) de la figure IV-2 correspond au circuit obtenu en

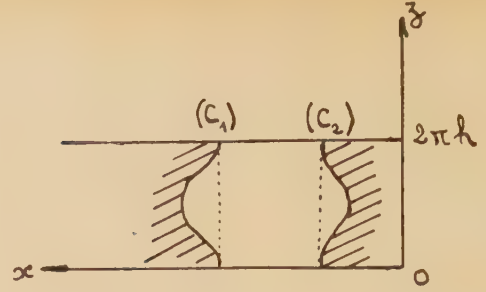


FIG. IV-2. — Base d'un coaxial à cannelure hélicoïdale.

munissant un guide circulaire d'une cannelure hélicoïdale. (C_2) conduirait au problème extérieur correspondant. Enfin l'ensemble (C_1) , (C_2) permettrait d'envisager des circuits du type coaxial.

2. Ondes hélicoïdales.

Étant donné un circuit hélicoïdal illimité, on peut se proposer d'examiner s'il est susceptible de guider une onde électromagnétique possédant la même symétrie. On recherche donc une solution des équations de MAXWELL, satisfaisant aux conditions aux limites sur la surface des conducteurs, se propageant parallèlement à l'axe Oz et invariante par $(\mathcal{H})$ au facteur de propagation près.

En coordonnées semi-polaires, chacune des composantes du champ sera alors de la forme :

$$(IV-1) \quad f(r, \theta, z) = e^{-j\beta z} g(r, z/h - \theta)$$

la vitesse de phase comptée parallèlement à Oz, étant :

$$(IV-2) \quad v = \omega/\beta.$$

Fixant z , l'uniformité de la solution autour de Oz entraîne que la fonction $g(r, u)$ est périodique en u et de période 2π . Il est alors naturel d'exprimer cette fonction sous forme de série trigonométrique :

$$(VI-3) \quad f(r, \theta, z) = e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r) e^{jn(z/h - \theta)}.$$

Les composantes du champ seront donc des développements de la forme :

$$(IV-4) \quad \begin{aligned} E_r &= e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r) e^{jn(z/h - \theta)} \\ E_\theta &= e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(r) e^{jn(z/h - \theta)} \\ E_z &= e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(r) e^{jn(z/h - \theta)} \\ H_r &= e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_n(r) e^{jn(z/h - \theta)} \\ H_\theta &= e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_n(r) e^{jn(z/h - \theta)} \\ H_z &= e^{-j\beta z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} N_n(r) e^{jn(z/h - \theta)} \end{aligned}$$

On est ramené à la détermination des fonctions de la seule variable r : $a_n(r), \dots, N_n(r)$.

3. Expressions générales des coefficients a_n, b_n, N_n .

Écrivons que les expressions (4) satisfont aux équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H}, \\ \text{rot } \vec{H} &= j\omega\varepsilon \vec{E}. \end{aligned}$$

Le calcul est purement formel et on ne soulèvera pas, pour l'instant, de difficulté relative à la convergence des développements ou de leurs dérivées. Le détail de ce calcul n'apporte rien de nouveau par lui-même. Donnons simplement les résultats. Éliminant le champ magnétique, on trouve que les fonctions $a_n(r)$ et $b_n(r)$ satisfont au système homogène :

$$(IV-5) \quad \begin{aligned} a_n'' + a_n'/r - [\gamma_n^2 + (n^2 + 1)/r^2] a_n &= -2jn b_n/r^2 \\ b_n'' + b_n'/r - [\gamma_n^2 + (n^2 + 1)/r^2] b_n &= 2jna_n/r^2 \end{aligned}$$

avec

$$(IV-6) \quad a_n' + a_n/r - jnb_n/r + j(n/h - \beta)c_n = 0$$

γ_n^2 représente la quantité :

$$(IV-7) \quad \gamma_n^2 = (n/h - \beta)^2 - k^2$$

qui s'introduit dans le calcul et dont le rôle sera essentiel dans la suite.

On peut résoudre (5) en remarquant que les fonctions $a_n(r) + j b_n(r)$ et $a_n(r) - j b_n(r)$ sont respectivement solutions des équations :

$$(IV-8) \quad \begin{aligned} u'' + u'/r - [\gamma_n^2 + (n-1)^2/r^2] u &= 0 \\ u'' + u'/r - [\gamma_n^2 + (n+1)^2/r^2] u &= 0 \end{aligned}$$

de sorte que :

$$(IV-9) \quad \begin{aligned} a_n(r) &= A_n I_{n-1}(\gamma_n r) + B_n I_{n+1}(\gamma_n r) \\ &\quad + C_n K_{n-1}(\gamma_n r) + D_n K_{n+1}(\gamma_n r) \end{aligned}$$

$$(IV-10) \quad \begin{aligned} j b_n(r) &= A_n I_{n-1}(\gamma_n r) - B_n I_{n+1}(\gamma_n r) \\ &\quad + C_n K_{n-1}(\gamma_n r) - D_n K_{n+1}(\gamma_n r) \end{aligned}$$

puis d'après (6) :

$$(IV-11)$$

$$c_n(r) = j \frac{\gamma_n}{n/h - \beta} [(A_n + B_n) I_n(\gamma_n r) - (C_n + D_n) K_n(\gamma_n r)].$$

Revenant au champ magnétique, en posant pour abrégé :

$$(IV-12) \quad \gamma_n'^2 = (n/h - \beta)^2 + k^2,$$

on obtiendra :

$$(IV-13) \quad \begin{aligned} L_n(r) &= 1/2 j \omega \mu (n/h - \beta) \{ A_n [\gamma_n'^2 I_{n-1}(\gamma_n r) \\ &\quad + \gamma_n^2 I_{n+1}(\gamma_n r)] - B_n [\gamma_n^2 I_{n-1}(\gamma_n r) + \gamma_n'^2 I_{n+1}(\gamma_n r)] \\ &\quad + C_n [\gamma_n'^2 K_{n-1}(\gamma_n r) + \gamma_n^2 K_{n+1}(\gamma_n r)] \\ &\quad - D_n [\gamma_n^2 K_{n-1}(\gamma_n r) + \gamma_n'^2 K_{n+1}(\gamma_n r)] \} \end{aligned}$$

$$(IX-14) \quad \begin{aligned} M_n(r) &= -1/2 j \omega \mu (n/h - \beta) \{ A_n [\gamma_n'^2 I_{n-1}(\gamma_n r) \\ &\quad - \gamma_n^2 I_{n+1}(\gamma_n r)] - B_n [\gamma_n^2 I_{n-1}(\gamma_n r) - \gamma_n'^2 I_{n+1}(\gamma_n r)] \\ &\quad + C_n [\gamma_n'^2 K_{n-1}(\gamma_n r) - \gamma_n^2 K_{n+1}(\gamma_n r)] \\ &\quad - D_n [\gamma_n^2 K_{n-1}(\gamma_n r) - \gamma_n'^2 K_{n+1}(\gamma_n r)] \} \end{aligned}$$

$$(IV-15) \quad \begin{aligned} N_n(r) &= \gamma_n / \omega \mu [(A_n - B_n) I_n(\gamma_n r) \\ &\quad - (C_n - D_n) K_n(\gamma_n r)]. \end{aligned}$$

Le champ électromagnétique est ainsi entièrement exprimé au moyen seulement de 4 suites de constantes d'intégration : A_n, B_n, C_n, D_n .

Il fait intervenir les fonctions de BESSEL modifiées I_n et K_n réelles en même temps que les quantités γ_n . Si éventuellement certaines de ces quantités devenaient imaginaires, il suffirait de revenir aux fonctions de BESSEL et de HANKEL :

$$(IV-16) \quad \begin{aligned} J_n(x) &= j^{-n} I_n(jx) \\ H_n^{(2)}(x) &= 2/\pi j^{n+1} K_n(jx). \end{aligned}$$

Remarque. — On pourrait exprimer la solution du problème au moyen de deux vecteurs de HERTZ parallèles à Oz : P_E et P_H , suivant les formules (II-2) et (II-3) rappelées au début du chapitre II. Il suffirait de prendre :

$$(IV-17)$$

$$\begin{aligned} P_E &= -j e^{-j\beta z} \sum_n \frac{1}{\gamma_n (n/h - \beta)} [(A_n + B_n) I_n(\gamma_n r) \\ &\quad - (C_n + D_n) K_n(\gamma_n r)] e^{jn(z/h - \theta)} \end{aligned}$$

$$(IV-18)$$

$$\begin{aligned} P_H &= \frac{1}{\omega \mu} e^{-j\beta z} \sum_n \frac{1}{\gamma_n} [(A_n - B_n) I_n(\gamma_n r) \\ &\quad - (C_n - D_n) K_n(\gamma_n r)] e^{jn(z/h - \theta)}. \end{aligned}$$

D'où une décomposition de la solution en solution (E) et solution (H) comme dans la théorie des guides ordinaires, mais ne présentant pas le même intérêt du fait que les solutions partielles, ne pouvant satisfaire séparément aux conditions aux limites, n'ont pas d'existence autonome.

Remarque. — Le champ qu'on vient d'étudier conduit à quelques résultats qu'il peut être intéressant de mentionner ici, bien qu'on n'ait pas à les utiliser. Les composantes du champ électrique par exemple, satisfont en coordonnées semi-polaires aux relations :

$$(IV-19) \quad \begin{aligned} \Delta E_r + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) E_r &= \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}, \\ \Delta E_\theta + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) E_\theta &= -\frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}, \\ \Delta E_z + k^2 E_z &= 0. \end{aligned}$$

Introduisons un symbole $i = \pm j$ distinct de j (cf. [41]) de façon à former la quantité :

$$(IV-20) \quad E_r + i E_\theta = F(r, \theta, z) = e^{-j\beta z} \Phi(r, u); \quad (u = z - \theta h).$$

La fonction F satisfait à l'équation de propagation :

$$(IV-21) \quad \Delta F + \frac{2i}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) F = 0$$

tandis que la fonction de deux variables Φ satisfait à l'équation :

$$(VI-22) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - 2 \left(j\beta + i \frac{h}{r^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \left(k^2 - \beta^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi = 0$$

qui peut être comparée à l'équation de GOLDSTEIN, laquelle intervient en mécanique des fluides dans l'étude de l'hélice [45]. Bien que ces résultats soient purement formels ils montrent cependant qu'on peut tenter de ramener à un problème scalaire, un problème d'électromagnétisme.

La résolution complète du problème nécessite la détermination de la constante de propagation β et des constantes d'intégration. On utilise pour cela des conditions aux limites (champ électrique normal aux conducteurs, raccordement de solutions).

Des conditions de régularité conduisent dans les applications à partir d'expressions plus simples que celles qu'on vient d'établir. Ainsi l'étude d'un problème « intérieur », celui du guide cannelé par exemple, se fera au moyen des expressions :

$$(IV-23) \quad \begin{aligned} a_n(r) &= A_n I_{n-1}(\gamma_n r) + B_n I_{n+1}(\gamma_n r) \\ b_n(r) &= -j [A_n I_{n-1}(\gamma_n r) - B_n I_{n+1}(\gamma_n r)] \\ c_n(r) &= j \gamma_n / (n/h - \beta) (A_n + B_n) I_n(\gamma_n r) \end{aligned}$$

et d'expressions analogues pour les coefficients L_n, M_n, N_n en raison de la régularité des solutions sur l'axe $r = 0$.

De même on traitera un problème « extérieur », où l'axe est exclu de la région de propagation du champ, mais où celui-ci doit rester fini pour $r = \infty$, en partant de :

$$(IV-24) \quad \begin{aligned} a_n(r) &= C_n K_{n-1}(\gamma_n r) + D_n K_{n+1}(\gamma_n r), \\ b_n(r) &= -j [C_n K_{n-1}(\gamma_n r) - D_n K_{n+1}(\gamma_n r)], \\ c_n(r) &= -j \gamma_n / (n/h - \beta) (C_n + D_n) K_n(\gamma_n r). \end{aligned}$$

Le problème du fil en hélice est un problème mixte que l'on peut traiter en raccordant une solution intérieure (23) à une solution extérieure (24) (voir chapitre suivant).

Les expressions complètes (9) (10) (11) ne devront être employées que dans les problèmes du type « coaxial » (voir plus loin l'exemple de la ligne à retard) où la région de propagation ne contient pas l'axe et ne s'étend pas transversalement à l'infini.

Le procédé de calcul qu'on vient d'exposer se rattache à une méthode générale souvent utilisée en physique mathématique ou dans la technique, dans les problèmes aux limites où il n'est pas possible d'utiliser un système de coordonnées à la fois « séparable » et contenant les frontières comme surfaces coordonnées [47, 14]. On renonce à la seconde condition pourvu qu'on dispose d'un nombre suffisant de solutions élémentaires qu'on puisse « doser » dans une combinaison linéaire (une série, une intégrale) de façon à assurer les conditions aux limites. Pour rester dans le domaine de la radio-électricité bornons-nous à rappeler deux appli-

cations assez récentes de la méthode : le calcul des impédances d'obstacles dans les lignes [39, 40] et le calcul de cavités de klystrons [10, 9].

La méthode n'est simple qu'en apparence. Elle conduit à la résolution de systèmes linéaires infinis ou d'équations intégrales. Les systèmes linéaires infinis soulèvent des discussions délicates de convergence, et il est rare de pouvoir exprimer explicitement la solution. En revanche ils se prêtent aux résolutions numériques approchées dont se contente parfaitement la technique. Par exemple on substitue au système infini un système fini approché d'un nombre suffisamment grand d'inconnues et d'équations, ou encore on procède par approximations successives. Ces calculs sont extrêmement pénibles lorsqu'on ne dispose pas de machine automatique (machine à cartes perforées, par exemple). Cet aspect du problème n'est pas abordé dans ce travail. On appliquera la méthode à des types de circuits suffisamment simples pour que la solution puisse être obtenue explicitement.

Le problème est, dans le cas général, un problème à deux dimensions seulement. Il suffit de satisfaire aux conditions aux limites le long d'un profil engendrant le circuit, par exemple, pour que celles-ci soient assurées sur toute la surface de l'hélicoïde. Un cas particulier intéressant est le suivant : le circuit comprend un ruban enroulé en hélice sur un cylindre et, éventuellement, un ou deux autres cylindres conducteurs de même axe que le premier. On est ramené alors à un problème à une seule dimension. Ce sont de tels circuits que nous allons envisager.

Remarque. — L'étude du chapitre II n'est qu'une application particulière de la méthode exposée ici. Les formules (II-46) et (II-47) sont d'ailleurs bien de la forme (IV-23).

CHAPITRE V

CHAMP D'UNE HÉLICE FILIFORME DANS TOUT L'ESPACE

1. Exposé de la méthode de calcul.

Nous nous proposons maintenant d'illustrer les considérations générales du chapitre précédent en traitant complètement le problème du fil infiniment mince enroulé en hélice. Nous évaluerons d'abord le champ en tout point de l'espace, l'emploi de séries divergentes, mais sommables, permettant de surmonter la difficulté présentée par la nature singulière du circuit. Nous justifierons ensuite l'existence d'une onde de courant de vitesse c le long du fil. Enfin nous discuterons quelques applications des résultats obtenus et nous verrons leur utilité dans les calculs numériques intéressant la technique.

Le cylindre de rayon a sur lequel est enroulé le fil sépare une région « intérieure » d'une région « extérieure » au circuit envisagé. Les expressions (IV-23) et (IV-24) du chapitre précédent définissent

des ondes qui se propagent respectivement dans chacune de ces régions. Elles seront complétées par les expressions analogues des coefficients L_n , M_n , N_n relatifs au champ magnétique. Le raccordement des solutions intérieures et extérieures à travers la surface du cylindre permet de calculer les constantes d'intégration. Mais on se heurte alors à une double difficulté provenant du fait que le circuit est un fil sans épaisseur, c'est-à-dire une ligne singulière du champ électromagnétique. D'une part, la direction du champ électrique et du champ magnétique n'est pas déterminée sur le fil, où, d'autre part, les deux champs deviennent infinis.

On peut lever la première difficulté, c'est-à-dire fixer une orientation des champs sur le conducteur, en essayant d'assimiler celui-ci à un ruban très étroit et sans épaisseur, enroulé sur le cylindre en hélice à spires non jointives. Le fil sera considéré comme un ruban dont on aurait fait tendre la largeur vers zéro. La concordance des résultats avec ceux du chapitre III constituera la justification d'une hypothèse qui peut sembler assez arbitraire *a priori*.

Le raccordement des solutions consistera à évaluer les champs électrique et magnétique sur la surface du cylindre sauf sur l'hélice : $z = h\theta$ où certaines des composantes peuvent devenir infinies. Ainsi, par exemple, la différence $E_r^{(ext)} - E_r^{(int)}$ sera nulle sur la surface du cylindre $r = a$ sauf sur l'hélice, où elle est infinie. Elle a donc les propriétés de la fonction de DIRAC $\delta(z/h - \theta)$ de la variable $z/h - \theta$.

Mais les champs sont définis sous forme de développements trigonométriques. On est donc conduit à utiliser un développement de FOURIER-STIELTJES de la fonction de DIRAC $\delta(\theta)$ dans l'intervalle

$(-\pi, +\pi)$: $\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta}$ divergent, mais sommable, par exemple en moyenne arithmétique [49]. Dans le calcul formel qui suit il sera alors convenu d'évaluer les diverses composantes du champ par les sommes de CESARO de séries sommables (C, 1). On reviendra ensuite sur la discussion des convergences.

2. Conditions aux limites.

Imaginons un ruban étroit de largeur $d \cos \alpha$ (d compté parallèlement aux génératrices du cylindre) enroulé en hélice sur le cylindre de rayon a . En un

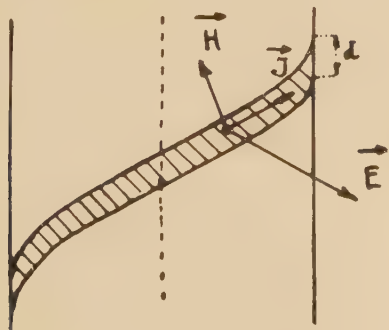


FIG. V-1. — Ruban enroulé en hélice.

point quelconque du ruban, supposé parfaitement conducteur, le champ électrique se réduit à sa composante radiale tandis que le champ magnétique tangent à la surface du ruban fait l'angle α avec les génératrices du cylindre. Supposant d très petit, on pourra poser les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} E_r^{(ext)} &= E_r^{(int)} + 2A \delta(z/h - \theta) \\ (V-1) \quad E_\theta^{(ext)} &= E_\theta^{(int)} \\ E_z^{(ext)} &= E_z^{(int)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_r^{(ext)} &= H_r^{(int)} \\ (V-2) \quad H_\theta^{(ext)} &= H_\theta^{(int)} + 2B \sin \alpha \delta(z/h - \theta) \\ H_z^{(ext)} &= H_z^{(int)} - 2B \cos \alpha \delta(z/h - \theta) \end{aligned}$$

avec des coefficients A et B qu'on peut interpréter physiquement de la façon suivante.

Associons comme au début du chapitre II, l'onde de charge $Q e^{-jk's}$ à l'onde de courant $I e^{-jk's}$ qui parcourt le fil (voir III-3)

$$(V-3) \quad Q = k' I / \omega$$

et étalons le courant I et la charge Q sur la largeur $d \cos \alpha$ du ruban, de telle sorte qu'on définit une densité moyenne de courant superficiel :

$$(V-4) \quad J = I / d \cos \alpha$$

et une densité moyenne de charge superficielle :

$$(V-5) \quad \rho = Q / d \cos \alpha = (k' / \omega) (I / d \cos \alpha).$$

La densité ρ mesure la discontinuité de la composante normale de l'induction $\vec{\epsilon} \vec{E}$ à travers la surface du ruban :

$$(V-6) \quad E_r^{(ext)} - E_r^{(int)} = \rho / \epsilon = (k' / \omega \epsilon) (I / d \cos \alpha).$$

Pour évaluer A il suffit alors d'intégrer la première équation (V-4) le long du morceau de génératrice $0 \leq z \leq 2\pi h$. Comparant à (6) il vient :

$$\frac{k'}{\omega \epsilon \cos \alpha} I = 2A h \int_0^{2\pi} \delta(u) du = 2A h.$$

d'où :

$$(V-7) \quad 2A = (k' / \omega \epsilon) (I / h \cos \alpha).$$

La densité superficielle de courant J est, de même, égale à la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique. Il vient ainsi :

$$(V-8) \quad 2B = I / h \cos \alpha.$$

La relation évidente :

$$(V-9) \quad A = k' / \omega \epsilon \quad B = k' \eta B / k$$

ne fait que traduire la conservation de l'électricité.

3. Calcul des coefficients A_n, B_n, C_n, D_n .

Les séries trigonométriques (IV-4) du chapitre précédent étant supposées sommables (C, 1), les conditions aux limites (1) et (2) écrites ci-dessus conduisent au système :

$$a_n^{(\text{ext})}(a) = a_n^{(\text{int})}(a) + A/\pi$$

$$L_n^{(\text{ext})}(a) = L_n^{(\text{int})}(a)$$

$$b_n^{(\text{ext})}(a) = b_n^{(\text{int})}(a)$$

$$M_n^{(\text{ext})}(a) = M_n^{(\text{int})}(a) + (B \sin \alpha)/\pi$$

$$c_n^{(\text{ext})}(a) = c_n^{(\text{int})}(a)$$

$$N_u^{(\text{ext})}(a) = N_n^{(\text{int})}(a) - (B \cos \alpha)/\pi$$

c'est-à-dire, en utilisant les expressions (IV-23) et (IV-24) :

$$\begin{aligned} C_n K_{n-1} + D_n K_{n+1} &= A_n I_{n-1} + B_n I_{n+1} + A/\pi \\ (V-10) \quad C_n K_{n-1} - D_n K_{n+1} &= A_n I_{n-1} - B_n I_{n+1} \\ (C_n + D_n) K_n &= -(A_n + B_n) I_n \end{aligned}$$

où l'on sous-entend l'argument $\gamma_n a$ des fonctions de BESSEL I et K . Les expressions des coefficients du champ magnétique conduisent à :

(Système V-11)

$$\begin{aligned} C_n (\gamma_n'^2 K_{n-1} + \gamma_n'^2 K_{n+1}) - D_n (\gamma_n'^2 K_{n-1} + \gamma_n'^2 K_{n+1}) \\ = A_n (\gamma_n'^2 I_{n-1} + \gamma_n'^2 I_{n+1}) - B_n (\gamma_n'^2 I_{n-1} + \gamma_n'^2 I_{n+1}) \\ C_n (\gamma_n'^2 K_{n-1} - \gamma_n'^2 K_{n+1}) - D_n (\gamma_n'^2 K_{n-1} - \gamma_n'^2 K_{n+1}) \\ = A_n (\gamma_n'^2 I_{n-1} - \gamma_n'^2 I_{n+1}) - B_n (\gamma_n'^2 I_{n-1} \\ - \gamma_n'^2 I_{n+1}) - 2\omega\mu(n/h - \beta)(\sin \alpha B)/\pi \\ (C_n - D_n) K_n = -(A_n - B_n) I_n + (\omega\mu \cos \alpha B)/\pi \end{aligned}$$

avec, rappelons-le :

$$\gamma_n'^2 = (n/h - \beta)^2 - k^2; \quad \gamma_n'^2 = (n/h - \beta)^2 + k^2.$$

On est ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire ordinaire (10) et (11) d'une extrême simplicité. Les équations (10) et la dernière équation (11) permettent de calculer A_n, B_n, C_n, D_n , en fonction de A et B qu'on peut remplacer par leurs expressions (7) et (8). La relation évidente

$$(V-12) \quad k' = \beta \sin \alpha$$

par laquelle la propagation de la phase envisagée le long de l'hélice est liée à la propagation parallèle à Oz, permet ensuite de vérifier que les deux premières équations (11) sont identiquement satisfaites. Dans tous ces calculs, les propriétés de récurrence des fonctions I_n et K_n , en particulier la relation (II-7), jouent un rôle essentiel.

On trouve ainsi sans difficulté la solution :

$$\begin{aligned} A_n &= I\eta/4\pi k (-\beta \gamma_n K_n + k^2 \cotg \alpha K_{n-1}) \\ B_n &= I\eta/4\pi k (-\beta \gamma_n K_n - k^2 \cotg \alpha K_{n+1}) \\ (V-13) \quad C_n &= I\eta/4\pi k (\beta \gamma_n I_n + k^2 \cotg \alpha I_{n-1}) \\ D_n &= I\eta/4\pi k (\beta \gamma_n I_n - k^2 \cotg \alpha I_{n+1}). \end{aligned}$$

En portant dans (IV-23) et (IV-24) on obtient les coefficients des développements des composantes du champ électrique :

Solution intérieure :

$$(V-14) \quad a_n(r) = I\eta/4\pi k \{ [-\beta \gamma_n K_n(\gamma_n a) + k^2 \cotg \alpha K_{n-1}(\gamma_n a)] I_{n-1}(\gamma_n r) - \beta \gamma_n K_n(\gamma_n a) + k^2 \cotg \alpha K_{n+1}(\gamma_n a) \} I_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

$$(V-15) \quad b_n(r) = -j I\eta/4\pi k \{ [-\beta \gamma_n K_n(\gamma_n a) + k^2 \cotg \alpha K_{n-1}(\gamma_n a)] I_{n-1}(\gamma_n r) + [\beta \gamma_n K_n(\gamma_n a) + k^2 \cotg \alpha K_{n+1}(\gamma_n a)] I_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

$$(V-16) \quad c_n(r) = -j (I\eta/2\pi k) [\beta(n/h - \beta) + k^2] K_n(\gamma_n a) I_n(\gamma_n r)$$

Solution extérieure (Cf. [24]).

$$(V-17) \quad a_n(r) = (I\eta/4\pi k) \{ [\beta \gamma_n I_n(\gamma_n a) + k^2 \cotg \alpha I_{n-1}(\gamma_n a)] K_{n-1}(\gamma_n r) + [\beta \gamma_n I_n(\gamma_n a) - k^2 \cotg \alpha I_{n+1}(\gamma_n a)] K_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

$$(V-18) \quad b_n(r) = -j (I\eta/4\pi k) \{ \beta \gamma_n I_n(\gamma_n a) + k^2 \cotg \alpha I_{n-1}(\gamma_n a) \} K_{n-1}(\gamma_n r) - [\beta \gamma_n I_n(\gamma_n a) - k^2 \cotg \alpha I_{n+1}(\gamma_n a)] K_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

$$(V-19) \quad c_n(r) = -j (I\eta/2\pi k) [\beta(n/h - \beta) + k^2] I_n(\gamma_n a) K_n(\gamma_n r).$$

Pour éviter les confusions on a mis en évidence l'argument des fonctions I et K .

Utilisées dans les développements des composantes (IV-4) les expressions qu'on vient d'obtenir permettent de calculer le champ électrique de l'hélice filiforme en tout point de l'espace (r, θ, z). Elles jouent un rôle fondamental dans tout ce qui suit.

Les expressions (13) font également connaître les coefficients des composantes du champ magnétique. Le forme générale du résultat n'apprendra rien de nouveau. Aussi, pour ne pas multiplier des formules prohibitives, nous bornerons-nous à n'étudier le champ magnétique que dans des cas particuliers.

4. Champ sur l'axe.

Considérons le cas particulier des points de l'axe Oz ($r = 0$). Comme la fonction $I_n(x)$ s'annule avec la variable, sauf si $n = 0$ ($I_0(0) = 1$), il s'ensuit que tous les coefficients de la solution intérieure sont nuls à l'exception de :

$$\begin{aligned} a_{-1}(0) &= -I\eta/4\pi k [\beta \gamma_{-1} K_{-1}(\gamma_{-1} a) + k^2 \cotg \alpha K_0(\gamma_{-1} a)] \\ b_1(0) &= -j I\eta/4\pi k [\beta \gamma_{-1} K_{-1}(\gamma_{-1} a) + k^2 \cotg \alpha K_0(\gamma_{-1} a)] \\ a_1(0) &= -I\eta/4\pi k [\beta \gamma_1 K_1(\gamma_1 a) - k^2 \cotg \alpha K_0(\gamma_1 a)] \\ b_1(0) &= j I\eta/4\pi k [\beta \gamma_1 K_1(\gamma_1 a) - k^2 \cotg \alpha K_0(\gamma_1 a)] \\ c_0(0) &= j I\eta/2\pi k (\beta^2 - k^2) K_0(\gamma_0 a). \end{aligned}$$

En utilisant le repère du chapitre III ($z - \theta h = 0$), les développements (IV-4) se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} E_r &= e^{-j\beta z} [a_{-1}(0) + a_1(0)] \\ E_\theta &= e^{-j\beta z} [b_{-1}(0) + b_1(0)] \\ E_z &= e^{-j\beta z} c_0(0). \end{aligned}$$

Comme enfin $K_{-1}(x) = K_1(x)$, on voit qu'on retrouve les expressions du tableau (A) obtenues au

chapitre III par un calcul direct. D'où une excellente confirmation des hypothèses de départ. On peut faire la vérification matérielle relative au champ magnétique, mais le calcul est inutile du fait que les champs électrique et magnétique sont liés par les équations de MAXWELL.

Remarque. — Le calcul a été fait à partir d'un ruban enroulé sur un cylindre (ruban cylindrique). On peut objecter que ce choix est arbitraire et qu'on aurait pu aussi bien partir d'un ruban hélicoïdal quelconque (découpé dans un hélicoïde à cône directeur). Par raison de symétrie, il suffit d'ailleurs de poser le problème dans le seul cas d'un étroit ruban orthogonal au cylindre, par conséquent découpé dans un hélicoïde à plan directeur. Les propriétés corrélatives du champ électromagnétique fournissent une réponse sans aucun calcul. Les conditions aux limites sur le ruban hélicoïdal sont celles de la figure IV-1, où les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ auraient été échangés. Ce sont donc celles d'un ruban cylindrique parfait conducteur du magnétisme. Un tel ruban parcouru par un courant magnétique I_m créerait le même champ que celui qu'on vient de calculer à l'échange près des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ affectés de facteurs convenables. On ne retrouverait donc plus les expressions du champ sur l'axe du chapitre IV. L'hypothèse faite au début du présent chapitre est donc exclusive.

5. Expressions asymptotiques des coefficients.

En vue des discussions qui vont suivre il est extrêmement utile d'examiner le comportement des coefficients a_n , b_n , c_n (pour nous limiter au champ électrique) pour les valeurs élevées, positives ou négatives, de l'indice n .

Bornons-nous au cas de la solution intérieure. Il suffit de connaître le comportement d'expressions de la forme :

$$K_{n+\sigma}(\gamma_n a) I_{n+\tau}(\gamma_n r) \quad (\sigma, \tau = -1, 0, 1)$$

pour $|n|$ grand, l'argument étant également grand puisque :

$$\gamma_n = \sqrt{(n/h - \beta)^2 - k^2} \sim |n|/h.$$

L'emploi de formules asymptotiques données par NICHOLSON [23], nous a permis d'aboutir aisément au résultat (voir Annexe du chapitre). Pour faciliter les calculs, on a introduit la variable auxiliaire u définie par

$$(V-20) \quad \text{sh } u = h/r$$

et prenant la valeur u_0 pour $r = a$

$$(V-21) \quad \text{sh } u_0 = h/a = \text{tg } \alpha.$$

A l'intérieur du cylindre ($r < a$), on a : $u > u_0$.

Remarque : u_0 est ce qu'on appelle parfois le

« lambertien » de α . Notons les relations utiles pour a suite :

$$(V-22) \quad \text{ch } u_0 = 1/\cos \alpha$$

$$(V-23) \quad \text{th } u_0 = \sin \alpha.$$

Posant pour abréger :

$$(V-24) \quad F(u) = \coth u_0 - (\coth u - u)$$

$$(V-25) \quad G(u) = \beta h (\coth u_0 - \coth u)$$

$$(F(u) \geq 0 \text{ pour } u \geq u_0)$$

on a obtenu l'expression asymptotique suivante ($n > 0$) :

$$(V-26) \quad K_{n+\sigma}(\gamma_n a) I_{n+\tau}(\gamma_n r) \sim 1/2 n \sqrt{\coth u_0 \cdot \coth u} \times e^{-nF(u) + G(u) + \sigma u_0 - \tau u},$$

$$(V-27) \quad K_{n+\sigma}(\gamma_{-n} a) I_{n+\tau}(\gamma_{-n} r) \sim 1/2 n \sqrt{\coth u_0 \cdot \coth u} \times e^{-nF(u) - G(u) + \sigma u_0 - \tau u}.$$

En portant les résultats dans (V-14), (V-15) et (V-16) il vient :

$$(V-28)$$

$$a_{\pm n}(r) = -\frac{I\eta}{4\pi k} \frac{e^{-nF(u) \pm G(u)}}{\sqrt{\coth u_0 \coth u}} \left[\frac{\beta}{h} \text{ch } u + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$b_{\pm n}(r) = j \frac{I\eta}{4\pi k} \frac{e^{-nF(u) \pm G(u)}}{\sqrt{\coth u_0 \coth u}} \left[\frac{\beta}{h} \text{sh } u + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$c_{\pm n}(r) = -j \frac{I\eta}{4\pi k} \frac{e^{-nF(u) \pm G(u)}}{\sqrt{\coth u_0 \coth u}} \left[\frac{\beta}{h} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Enfin sur la surface du cylindre on aura d'après les expressions (19) et (20) de l'Annexe :

$$(V-29)$$

$$a_n(a) = -\frac{I\eta}{4\pi k} \frac{\beta}{h} \text{sh } u_0 \left[1 - \frac{\text{sh } u_0}{2n \text{ch}^3 u_0} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-30)$$

$$b_n(a) = j \frac{I\eta}{4\pi k} \text{th } u_0 \left[\frac{\beta}{h} \text{sh } u_0 + \frac{1}{n} \left(\beta^2 \frac{\text{sh } u_0}{\text{ch}^2 u_0} - k^2 \cotg \alpha \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-31)$$

$$c_n(a) = -j \frac{I\eta}{4\pi k} \text{th } u_0 \left[\frac{\beta}{h} + \frac{1}{n} (k^2 - \beta^2 \text{th}^2 u_0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Ou encore, en revenant par (21), (22), (23) à l'angle α de l'hélice :

$$(V-32)$$

$$a_{\pm n}(a) = -\frac{I\eta}{4\pi k} \frac{\beta}{a} \left[1 - \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-33)$$

$$b_{\pm n}(a) = j \frac{I\eta}{4\pi k} \left[\pm \frac{\beta}{a} \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{n} (\beta^2 \sin^2 \alpha - k^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-34)$$

$$c_{\pm n}(a) = -j \frac{I\eta}{4\pi k} \left[\pm \frac{\beta}{a} \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{n} (\beta^2 \sin^2 \alpha - k^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Nous allons tirer, des résultats de ce paragraphe, un certain nombre de conséquences extrêmement importantes.

6. Convergence des développements des composantes.

a) Soit d'abord le cas d'un point (r, θ, z) intérieur au cylindre. Les composantes du champ électrique, par exemple, sont définies par des séries trigonométriques telles que :

$$(V-35) \quad E_r = e^{-j\beta z} \left[a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [a_n(r) + a_{-n}(r)] \cos n \left(\frac{z}{h} - \theta \right) + j [a_n(r) - a_{-n}(r)] \sin n \left(\frac{z}{h} - \theta \right) \right\} \right]$$

Pour les grandes valeurs de n , les coefficients de ces séries se comportent d'après (28) comme la quantité :

$$e^{-nF(u)} = 1/X^n.$$

Or, lorsque r décroît de a à 0, on a :

$$(V-36) \quad u_0 \leq u \leq +\infty, \quad \text{et} \\ 1 \leq X = e^{F(u)} \leq +\infty.$$

Par conséquent :

1° Les développements des composantes du champ sont absolument et uniformément convergents dans tout intervalle $0 \leq r \leq a - \varepsilon$.

2° La convergence est d'autant plus rapide qu'on se rapproche de l'axe du cylindre.

La raison élémentaire de ces résultats est que les coefficients se comportent comme le produit d'une fonction $K_n(\gamma_n a)$, décroissant avec n , par une fonction $I_n(\gamma_n r)$ croissant avec n , la décroissance de la première étant d'autant plus difficilement compensée par la croissance de la seconde que r diffère de a .

Au voisinage de l'axe la convergence est telle qu'on pourra calculer le champ avec quelques termes seulement. Dans certains cas on pourra même se borner au premier terme : $a_0(r) e^{-j\beta z}$ (voir l'exemple numérique traité plus loin). Il est intéressant d'observer, dès maintenant, que cette dernière approximation conduit à un champ de révolution autour de l'axe. A première vue elle équivaut à l'approximation de la couche continue. D'ailleurs, en faisant $n = 0$ dans (14), (15), (16), il vient :

$$(V-37) \quad \begin{aligned} a_0(r) &= -(I\eta/2\pi k) \beta \gamma_0 K_0(\gamma_0 a) I_1(\gamma_0 r) \\ b_0(r) &= -j (I\eta/2\pi k) k^2 \cotg \alpha K_1(\gamma_0 a) I_1(\gamma_0 r) \\ c_0(r) &= -j (I\eta/2\pi k) \gamma_0^2 K_0(\gamma_0 a) I_0(\gamma_0 r) \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_0^2 = \beta^2 - k^2.$$

On retrouve les expressions (II-18) du chapitre II. Sous réserve de déterminer la vitesse de l'onde, la méthode de la couche continue apparaît ainsi comme l'approximation dans laquelle des séries d'une

extrême rapidité de convergence sont réduites à leur premier terme.

En revanche, lorsqu'on se rapproche de la surface du cylindre les croissances des fonctions K_n et I_n se compensent de mieux en mieux, rendant par là la convergence des développements extrêmement lente. Nous montrerons, dans la discussion numérique, qu'on peut néanmoins calculer le champ près du cylindre, en particulier près du fil, en substituant aux séries précédentes, des séries numériques de convergence plus rapide.

b) L'étude du champ extérieur au cylindre se fait, *mutatis mutandis*, de la même façon. On partirait évidemment des expressions (17) à (19). Les composantes du champ sont définies par des séries trigonométriques en $zh - \theta$ absolument et uniformément convergentes dans tout intervalle $(a + \varepsilon \leq r \leq +\infty)$. La convergence est d'autant plus rapide qu'on s'éloigne du cylindre $r = a$.

7. Discussion des développements sur le cylindre.

La discussion des séries attachées aux composantes du champ est un peu plus délicate sur la surface même du cylindre sur lequel est tracée l'hélice. D'après (32) à (34) on voit que les coefficients tendent pour n infini vers des valeurs finies non nulles. Les séries sont alors divergentes, conformément d'ailleurs, à l'hypothèse acceptée au début de ce chapitre. On avait convenu de sommer ces séries en moyenne arithmétique.

Le développement (35) conduit à mettre en évidence les coefficients réels suivants :

$$(V-38) \quad a_n + a_{-n} = -\frac{I\eta}{2\pi k} \frac{\beta}{a} \left[1 - \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-39) \quad b_n + b_{-n} = j \frac{I\eta}{2\pi k} \left[\frac{\cos \alpha}{n} (\beta^2 \sin^2 \alpha - k^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-40) \quad c_n + c_{-n} = j \frac{I\eta}{2\pi k} \left[\frac{\sin \alpha}{n} (\beta^2 \sin^2 \alpha - k^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

et

$$(V-41) \quad a_n - a_{-n} = 0(1/n^2)$$

$$(V-42) \quad b_n - b_{-n} = j \frac{I\eta}{2\pi k} \left[\frac{\beta}{a} \sin \alpha + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$(V-43) \quad c_n - c_{-n} = -j \frac{I\eta}{2\pi k} \left[\frac{\beta}{a} \cos \alpha + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Les séries trigonométriques (IV-4) faisant connaître le champ sont donc sommables (C, 1) sur la surface du cylindre $r = a$, sauf sur l'hélice $z - \theta h = 0$ elle-même, où les séries :

$$(V-44) \quad \begin{aligned} E_r &= e^{-j\beta z} \left\{ a_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(a) + a_{-n}(a)] \right\} \\ E_\theta &= e^{-j\beta z} \left\{ b_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n(a) + b_{-n}(a)] \right\} \\ E_z &= e^{-j\beta z} \left\{ c_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(a) + c_{-n}(a)] \right\} \end{aligned}$$

ont des sommes infinies, correspondant au champ infini en tout point du fil.

La situation que nous rencontrons ici est celle d'un grand nombre de problèmes de physique mathématique. Les composantes du champ sont définies par des séries presque partout convergentes dans l'espace. Celles-ci divergent sur la surface du cylindre où, cependant, elles restent presque partout sommables en moyenne arithmétique. Enfin, elles sont essentiellement divergentes sur l'hélice.

On trouvera en annexe quelques précisions d'ordre plus mathématique.

8. Application : vitesse de l'onde le long du fil.

Si l'on se reporte aux formules (39) et (40), on constate que les séries (44) qui définissent E_θ et E_z et qui divergent comme la série harmonique, deviennent convergentes lorsque la condition :

$$(V-45) \quad \beta = k/\sin \alpha$$

est vérifiée. Cette condition déjà rencontrée à plusieurs reprises dans ce qui précède exprime simplement que l'onde se propage le long du fil avec la vitesse c des ondes libres.

Or en un point quelconque de l'hélice tout vecteur fini : $\vec{E} (E_r, E_\theta, E_z)$ fait avec la tangente à la courbe l'angle Ω donné par :

$$\cos \Omega = (E_\theta \cos \alpha + E_z \sin \alpha)/E.$$

C'est un angle de 90° si la longueur E du vecteur devient infinie en même temps que le numérateur reste fini. Ainsi, bien que l'hélice constitue une ligne singulière le long de laquelle le champ est infini, on peut admettre que les lignes de champ aboutissent normalement au conducteur. Sans prétendre à une justification rigoureuse du résultat, on peut affirmer que la condition (45) est celle par laquelle on se rapproche le plus des conditions aux limites habituelles à la surface des conducteurs parfaits qui ne se réduisent pas au cas limite de fils sans épaisseur. Lorsque l'onde se propage le long du fil avec la vitesse de la lumière, et dans ce cas seulement, la composante tangentielle du champ électrique en tout point de l'hélice reste finie. On notera la remarquable simplicité du procédé utilisé.

9. Expressions définitives du champ.

La condition (45) permet d'écrire les expressions (14) à (19) sous la forme plus simple qu'on utilisera désormais :

Solution intérieure :

$$(V-45) \quad a_n(r) = \frac{I\eta}{4\pi \sin \alpha} \{ [-\gamma_n K_n(\gamma_n a) + k \cos \alpha K_{n-1}(\gamma_n a)] I_{n-1}(\gamma_n r) - [\gamma_n K_n(\gamma_n a) + k \cos \alpha K_{n+1}(\gamma_n a)] I_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

$$(V-46) \quad b_n(r) = -j \frac{I\eta}{4\pi \sin \alpha} \{ [-\gamma_n K_n(\gamma_n a) + k \cos \alpha K_{n-1}(\gamma_n a)] I_{n-1}(\gamma_n r) + [\gamma_n K_n(\gamma_n a) + k \cos \alpha K_{n+1}(\gamma_n a)] I_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

(V-47)

$$c_n(r) = -j \frac{I\eta}{2\pi \sin \alpha} \cotg \alpha \left(\frac{n}{a} - k \cos \alpha \right) K_n(\gamma_n a) I_n(\gamma_n r).$$

Solution extérieure :

$$(V-48) \quad a_n(r) = \frac{I\eta}{4\pi \sin \alpha} \{ [\gamma_n I_n(\gamma_n a) + k \cos \alpha I_{n-1}(\gamma_n a)] K_{n-1}(\gamma_n r) + [\gamma_n I_n(\gamma_n a) - k \cos \alpha I_{n+1}(\gamma_n a)] K_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

$$(V-49) \quad b_n(r) = -j \frac{I\eta}{4\pi \sin \alpha} \{ [\gamma_n I_n(\gamma_n a) + k \cos \alpha I_{n-1}(\gamma_n a)] K_{n-1}(\gamma_n r) - [\gamma_n I_n(\gamma_n a) - k \cos \alpha I_{n+1}(\gamma_n a)] K_{n+1}(\gamma_n r) \}$$

(V-50)

$$c_n(r) = -j \frac{I\eta}{2\pi \sin \alpha} \cotg \alpha \left(\frac{n}{a} - k \cos \alpha \right) I_n(\gamma_n a) K_n(\gamma_n r)$$

avec

$$(V-51) \quad \gamma_n a = \cotg \alpha \sqrt{n^2 - (2nka/\cos \alpha) + k^2 a^2}.$$

Nous n'écrivons pas les expressions analogues, mais plus compliquées, relatives au champ magnétique.

10. Cas particulier : problème du solénoïde ordinaire [17].

Il est extrêmement facile de déduire des résultats généraux qui précèdent le champ de l'hélice en régime stationnaire. Il suffit de faire tendre k vers 0. Alors $\gamma_{\pm n}$ et $\gamma'_{\pm n}$ tendent vers n/h ($n > 0$). Bornons-nous, pour abréger, aux solutions intérieures. On obtient ainsi pour le champ électrique :

$$(V-52) \quad \begin{aligned} a_n(r) &= -\frac{I\eta}{2\pi \sin \alpha} \frac{n}{h} K_n\left(\frac{n}{h} a\right) I'_n\left(\frac{n}{h} r\right) \\ b_n(r) &= j \frac{I\eta}{2\pi \sin \alpha} \frac{n}{r} K_n\left(\frac{n}{h} a\right) I_n\left(\frac{n}{h} r\right) \\ c_n(r) &= -j \frac{I\eta}{2\pi \sin \alpha} \frac{n}{h} K_n\left(\frac{n}{h} a\right) I_n\left(\frac{n}{h} r\right) \end{aligned}$$

ou explicitement :

(V-53)

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{I\eta}{\pi h \sin \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n K_n\left(\frac{n}{h} a\right) I'_n\left(\frac{n}{h} r\right) \cos n\left(\frac{z}{h} - \theta\right) \\ E_\theta &= -\frac{I\eta}{\pi r \sin \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n K_n\left(\frac{n}{h} a\right) I_n\left(\frac{n}{h} r\right) \sin n\left(\frac{z}{h} - \theta\right) \\ E_z &= \frac{I\eta}{\pi h \sin \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n K_n\left(\frac{n}{h} a\right) I_n\left(\frac{n}{h} r\right) \sin n\left(\frac{z}{h} - \theta\right). \end{aligned}$$

Il est facile de calculer le champ magnétique à partir des formules (IV-13) On a par exemple :

$$I_n(r) = (1/2j k \eta) (n/h) (A_n - B_n) [I_{n-1}(\gamma_n r) + I_{n+1}(\gamma_n r)]$$

avec

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= (I\eta/4\pi) k \cotg \alpha [K_{n-1}(\gamma_n a) + K_{n+1}(\gamma_n a)] \\ &= -(I\eta/2\pi) k \cotg \alpha K'_n(\gamma_n a) \end{aligned}$$

d'où :

$$L_n(r) = j \frac{I}{2\pi h} \cotg \alpha n K'_n \left(\frac{n}{h} a \right) I'_n \left(\frac{n}{h} r \right);$$

de même :

$$(V-54) \quad \begin{aligned} M_n(r) &= \frac{I}{2\pi r} \cotg \alpha n K'_n \left(\frac{n}{h} a \right) I_n \left(\frac{n}{h} r \right) \\ N_n(r) &= -\frac{I}{2\pi h} \cotg \alpha n K'_n \left(\frac{n}{h} a \right) I_n \left(\frac{n}{h} r \right) \end{aligned}$$

ou explicitement :

$$(V-55) \quad \begin{aligned} H_r &= \frac{I}{\pi h} \cotg \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n K'_n \left(\frac{n}{h} a \right) I'_n \left(\frac{n}{h} r \right) \sin n \left(\frac{z}{h} - \theta \right) \\ H_\theta &= \frac{I}{\pi r} \cotg \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n K'_n \left(\frac{n}{h} a \right) I_n \left(\frac{n}{h} r \right) \cos n \left(\frac{z}{h} - \theta \right) \\ H_z &= \frac{I}{\pi h} \left[\frac{1}{2} - \cotg \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n K'_n \left(\frac{n}{h} a \right) I_n \left(\frac{n}{h} r \right) \cos n \left(\frac{z}{h} - \theta \right) \right]. \end{aligned}$$

11. Interprétation de la solution générale.

Chaque composante du champ est la superposition d'une infinité d'ondes élémentaires telles que :

$$(V-56) \quad \begin{aligned} A_n(r, \theta, z) &= e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} a_n(r) e^{jn \left(\frac{z}{h} - \theta \right)} \\ &= a_n(r) e^{-jn\theta} e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} \end{aligned}$$

en posant :

$$(V-57) \quad \beta_n = k/\sin \alpha - n/h = (ka - n \cos \alpha)/a \sin \alpha.$$

Bien entendu, il s'agit là d'une représentation conventionnelle. Les « ondes » A_n n'ont pas d'existence individuelle. Cependant, on verra plus loin, qu'au voisinage de l'axe ou à grande distance du cylindre, des ondes isolées prédominent tout se passant comme si elles avaient une existence autonome.

Les coefficients tels que $a_n(r)$ sont donnés par (45) à (47). L'onde A_n présente dans tout plan $z = C^{te}$ une symétrie de répétition d'ordre n . En particulier l'onde A_0 est de révolution autour de l'axe Oz.

Suivons la phase de l'onde A_n le long d'une hélice quelconque d'axe Oz et de pas h : $r = C^{te}$, $z - \theta h = C^{te}$. Elle se propage avec une vitesse dont la projection sur l'axe est égale à $c \sin \alpha$. Elle ne dépend pas de la fréquence et a même valeur pour l'ensemble des ondes élémentaires.

On peut également envisager l'hélice comme une structure périodique en suivant la phase parallèlement à l'axe. L'onde A_n se propage alors avec la vitesse de phase.

$$(V-58) \quad V_n = \omega/\beta_n = [ka/(ka - n \cos \alpha)] c \sin \alpha.$$

V_n varie avec la fréquence et dépend de l'ordre n .

Au contraire, la vitesse de groupe U_n attachée à l'onde A_n :

$$(V-59) \quad U_n = d\omega/d\beta_n = c \sin \alpha$$

est non seulement indépendante de l'ordre n , ce qui est une propriété générale des structures périodiques, mais aussi de la fréquence. La solution du problème de l'hélice est ainsi la superposition d'une infinité d'ondes élémentaires se propageant axialement avec la même vitesse de groupe $c \sin \alpha$.

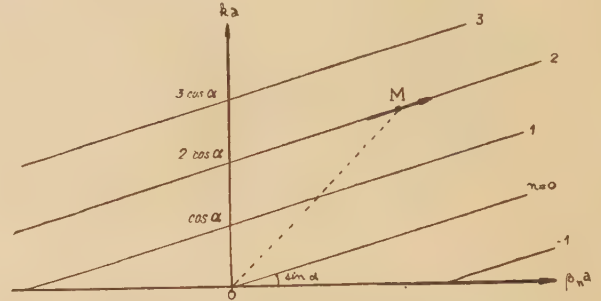


FIG. V-2 — Vitesse de phase et de groupe des ondes élémentaires.

La figure V-2 met graphiquement en évidence ces résultats. On a porté $\beta_n a$ en abscisse et ka en ordonnée. La relation (57) est alors représentée par un réseau de droites parallèles de pente $\sin \alpha$ et échelonnées de $\cos \alpha$ en ordonnées. Pour tout point M représentant une onde élémentaire la pente de OM fait connaître la vitesse de phase relative V_n/c et la tangente au lieu de M la vitesse de groupe U_n/c . Il apparaît alors immédiatement que la vitesse de

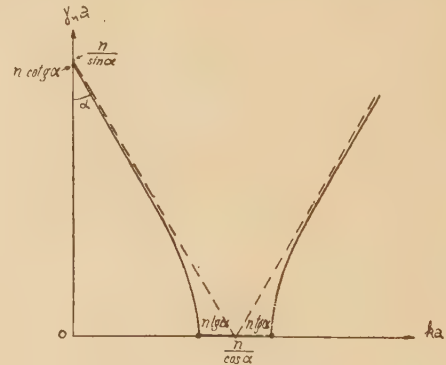


FIG. V-3 — Bande critique d'ordre n .

groupe U_n est uniformément égale à $c \sin \alpha$. Il est en outre facile de suivre la variation de la vitesse de phase V_n avec la fréquence, c'est-à-dire avec la variable ka . Si $n > 0$, V_n décroît constamment à partir de la valeur 0. Elle est infinie pour $ka = n \cos \alpha$, puis tend vers $c \sin \alpha$. Il est facile d'interpréter ces résultats en suivant l'onde qui parcourt le fil à la vitesse c . En particulier, la dernière condition peut s'écrire :

$$2\pi a/\cos \alpha = n\lambda.$$

La longueur d'une spire contient un nombre entier de longueurs d'onde. Les courants sont constamment en phase en tous les points de l'hélice qui

appartiennent à une même génératrice $r = a$. D'où la vitesse de phase infinie obtenue ci-dessus.

Lorsque $n < 0$, V_n croît avec ka , de 0 à $c \sin \alpha$. Enfin, dans le cas particulier de l'onde A_0 , V_0 reste constamment égale à la vitesse projetée $c \sin \alpha$.

DISCUSSION ET APPLICATIONS

Examinons, d'un point de vue pratique, les résultats auxquels conduisent les expressions générales (45) à (47). Pour ne pas alourdir la discussion nous nous bornerons, sauf mention précise, à l'étude du champ électrique intérieur.

12. Comportement des constantes de phase γ_n .

La valeur numérique des coefficients a_n , b_n , c_n , des développements des composantes du champ électrique dépend essentiellement des γ_n . Reprenons (51) :

$$(V-51) \quad \gamma_n a = \cotg \alpha \sqrt{n^2 - (2n/\cos \alpha) ka + k^2 a^2}$$

qui fait connaître, pour toute hélice dont l'inclinaison α des spires est donnée, l'ensemble des quantités sans dimension $\gamma_n a$, en fonction de ka . Rappelons que cette dernière quantité, également sans dimension, est simplement la mesure du contour de section du cylindre qui porte l'hélice, en longueurs d'onde ou, pratiquement, pour α petit, la mesure d'une spire d'hélice (longueur électrique de la spire). Elle est proportionnelle à la fréquence.

$\gamma_0 a$ est le paramètre, déjà rencontré, $ka \cotg \alpha$.

$\gamma_{-n} a$ ($n > 0$), toujours réel, croît extrêmement vite avec la variable ka à partir de la valeur $n \cotg \alpha$ élevée lorsque α est petit.

Enfin, $\gamma_n a$ n'est réel que pour les valeurs de ka extérieures aux intervalles : $n(1 \pm \sin \alpha)/\cos \alpha$.

Ainsi, à chaque rang n correspond une bande critique d'amplitude $2n \tg \alpha$ (fig. V-3) où $\gamma_n = j g_n$ est imaginaire pur, d'où des termes en $J_n(g_n r)$, ... ($r < a$) ou $H_n^{(2)}(g_n r)$, ... ($r > a$) qui représentent une onde stationnaire à l'intérieur du cylindre ou une onde se propageant radialement à l'extérieur de ce cylindre. Nous dirons que l'hélice est alors en régime d'antenne. Les bandes critiques s'étendent de part et d'autre des valeurs de la variable pour lesquelles la spire est un multiple de λ . On a représenté sur la figure V-4 le réseau des hyperboles homothétiques $\gamma_n a = f(ka)$. Les courbes de la figure III-5 en constituent une partie.

Les courbes du diagramme peuvent être confondues avec leurs asymptotes lorsque $\gamma_n a$ est grand.

$$(V-60) \quad \gamma_n a \simeq |ka \cotg \alpha - n/\sin \alpha|.$$

La figure permet de suivre aisément la variation de $\gamma_n a$ en fonction de l'argument ka .

Pour ka très petit tous les $\gamma_n a$ ont une valeur élevée ($\simeq n/\sin \alpha$), à l'exception de $\gamma_0 a$. Ensuite les $\gamma_n a$ d'indice positif décroissent, tandis que ceux d'indice négatif ou nul croissent. Dans la première bande critique et au voisinage de celle-ci, tous les

$\gamma_n a$ sont grands sauf $\gamma_1 a$ et ainsi de suite, tout au moins pour les premières bandes critiques. En

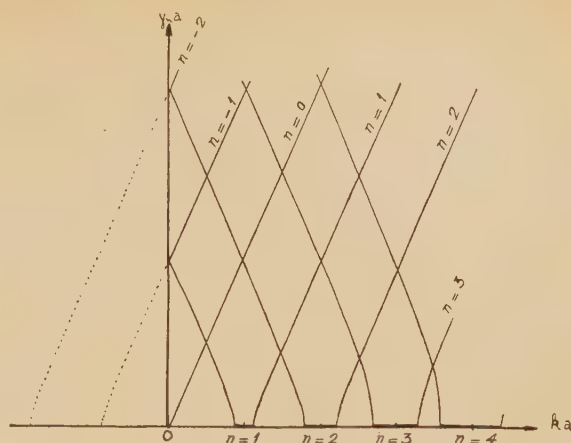


FIG. V-4 — Comportement des paramètres $\gamma_n a$.

effet, les bandes d'indice élevé finissent par se recouvrir pour $n > (1 - \sin \alpha)/2 \sin \alpha$.

13. Champ au voisinage de l'axe.

On a montré au § 6 qu'au voisinage de l'axe la convergence des séries est extrêmement rapide. Si r/a est assez petit, on pourra même limiter celles-ci à un seul terme prépondérant. Il en serait de même à l'extérieur du cylindre pour r/a assez grand. La discussion qui termine le paragraphe précédent permet de prévoir les ondes élémentaires dominantes. En effet, les coefficients des développements en série dépendent de termes de la forme $K_p(\gamma_n a) I_q(\gamma_n r)$. Ceux-ci sont d'autant plus petits que $\gamma_n a$ est grand et que r/a est petit. Les ondes dominantes seront alors celles qui correspondent aux plus faibles valeurs de $\gamma_n a$. Ainsi, faisons croître la variable ka , par exemple la fréquence.

a) RÉGIME DE BASSE FRÉQUENCE (D'ORDRE 0)

Tous les $\gamma_n a$, sauf $\gamma_0 a$, sont grands pour ka petit. L'onde dominante est l'onde (A_0). Nous entendons par là l'ensemble des trois termes d'ordre 0 dans les composantes du champ électrique.

(V-61)

$$\begin{aligned} E_r &= e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} a_0(r) \\ &= -\frac{I \eta}{2\pi} k \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha} K_0(\gamma_0 a) I_1(\gamma_0 r) e^{-j k z / \sin \alpha} \\ E_\theta &= e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} b_0(r) \\ &= j \frac{I \eta}{2\pi} k \cotg \alpha K_1(\gamma_0 a) I_1(\gamma_0 r) e^{-j k z / \sin \alpha} \\ E_z &= e^{-j \frac{k}{\sin \alpha} z} c_0(r) \\ &= j \frac{I \eta}{2\pi} k \cotg^2 \alpha K_0(\gamma_0 a) I_0(\gamma_0 r) e^{-j k z / \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de l'axe et en basse fréquence (soit $ka < 0,3$ pour fixer les idées) la répartition du champ est sensiblement de révolution.

On voit d'une façon précise dans quelles conditions la théorie du fil fin et celle de la couche continue conduisent à des résultats concordants et on peut compléter les observations du § 6 où la question de la vitesse de propagation avait été réservée. L'identification complète des expressions (II-18) et (V-61) exigerait que la vitesse axiale de l'onde guidée par la couche continue fût égale à la projection $c \sin \alpha$, ce qui n'est qu'approximativement exact et pour des valeurs élevées du paramètre $ka \cotg \alpha$. Or la variable ka doit être supposée faible en régime de basse fréquence. Il est donc nécessaire de considérer un petit angle α .

Les théories de la couche continue et du fil fin conduisent donc à des résultats d'autant plus voisins que :

1° la fréquence (plus exactement la longueur électrique ka de la spire) est plus basse,

2° l'on considère des points rapprochés de l'axe,

3° l'inclinaison de l'hélice α est plus faible.

Ces conditions sont pratiquement vérifiées (à 10 % près) pour l'hélice du tube à ondes progressives. C'est la raison précise du succès de la méthode de la couche continue dans les premières théories de ce tube. Il n'en est plus de même aux fréquences telles que la spire dépasse $\lambda/2$ (régime d'antenne par exemple) ou bien dans les tubes à ondes progressives à large faisceau d'électrons (tube de PIERCE pour $\lambda = 6$ mm) ou enfin dans le cas éventuel d'une hélice à spires lâches.

Mathématiquement, la méthode de la couche continue apparaît comme une première approximation, celle dans laquelle on limite des séries à leur premier terme. Physiquement, le régime de propagation rappelle, toutes proportions gardées, l'exemple du guide circulaire périodiquement chargé par des diaphragmes en iris. Une onde dominante, ici l'onde guidée par la couche continue, se propage au voisinage de l'axe. Sur l'hélice une infinité d'ondes élémentaires assurent les conditions aux limites (dans le cas du fil sans épaisseur ces conditions concernent simplement la convergence absolue de certaines séries). A mesure qu'on s'écarte du cylindre sur lequel l'hélice est enroulée, les ondes élémentaires ont une atténuation suffisamment rapide pour ne laisser subsister que l'onde d'ordre 0.

Exemple numérique. — Nous avons étudié numériquement le cas de l'hélice du tube CNET ($a = 2,9$ mm, $\cotg \alpha = 13,015$) vers le milieu de la bande d'emploi du tube : $ka = 0,16$ ($\lambda = 11,4$ cm). Relativement aux dimensions du circuit le régime est un régime de basse fréquence. Le tableau ci-dessous fait connaître les valeurs relatives des coefficients :

$$a'_n(r) = -\frac{a_n(r)}{j c_0(0)} \quad b'_n(r) = -\frac{b_n(r)}{c_0(0)} \quad c'_n(r) = -\frac{c_n(r)}{c_0(0)}$$

On n'a conservé que troisdécimales. La précision reste largement suffisante pour les besoins de la technique.

La rapidité de convergence des séries apparaît clairement sur le tableau. Un seul terme (mode d'ordre 0) suffit pour calculer le champ jusqu'à une

TABLEAU

COMPOSANTE E_r					
r/a	a'_0	$a'_1 + a'_{-1}$	$a'_1 - a'_{-1}$	$a'_2 + a'_2$	$a'_2 - a'_2$
0,1	0,105				
0,2	0,213	0,001	0,001		
0,3	0,329	0,002	0,002		
0,4	0,464	0,005	0,004		
0,5	0,596	0,014	0,011		
0,6	0,757	0,041	0,028		
0,7	0,943	0,125	0,069	0,003	0,001
0,8	1,160	0,395	0,154	0,030	0,012
COMPOSANTE E_θ					
r/a	b'_0	$b'_1 + b'_1$	$b'_1 - b'_1$	$b'_2 + b'_2$	$b'_2 - b'_2$
0					
0,1	0,009				
0,2	0,020				
0,3	0,031				
0,4	0,043		0,001		
0,5	0,056	0,002	0,003		
0,6	0,071	0,004	0,006		
0,7	0,088	0,009	0,015		
0,8	0,108	0,017	0,041	0,001	0,003
COMPOSANTE E_z					
r/a	c'_0	$c'_1 + c'_1$	$c'_1 - c'_1$	$c'_2 + c'_2$	$c'_2 - c'_2$
0	1,000				
0,1	1,010				
0,2	1,043	— 0,001	— 0,001		
0,3	1,099	0,002	0,002		
0,4	1,177	0,004	0,005		
0,5	1,288	0,012	0,015		
0,6	1,430	0,030	0,044		
0,7	1,606	0,074	0,133	— 0,001	— 0,003
0,8	1,824	0,165	0,416	0,012	0,030

distance de l'axe voisine de $r = 0,3 a$. Le tableau montre en outre comment le calcul peut être étendu à des distances plus grandes à condition de prendre des termes supplémentaires. Avec trois termes (ceux en $n = 0$ et $n = \pm 1$) le champ peut être calculé, dans l'exemple considéré, jusqu'à $r \simeq 0,7 a$.

Remarques :

1. A mesure qu'on se rapproche du cylindre, la convergence devient de plus en plus lente. Avec 5 termes ($n = 0$, $n = \pm 1$, $n = \pm 2$) on ne pourra guère dépasser ici $r = 0,8 a$.

2. La méthode développée dans ce chapitre se prête parfaitement à une étude numérique du tube à ondes progressives à large faisceau d'électrons. Elle revient à fournir des termes correctifs aux composantes du champ calculées par la théorie de la couche continue.

b) RÉGIMES D'ORDRE 1. RÉGIMES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Supposons que, la variable ka augmentant, on se rapproche de la première bande critique. Le diagramme de la figure V-4 montre que l'onde (A_1) devient dominante au voisinage de l'axe. On pourra écrire :

$$(V-62) \quad E_r \simeq a_1(r) e^{-jz(ka - \cos \alpha)/a} \sin \alpha e^{-j\theta}, \dots$$

A l'onde (A_1) on peut attacher, comme on l'a montré au § 11, la vitesse de phase axiale :

$$(V-63) \quad V_1 = ka(c \sin \alpha)/(ka - \cos \alpha)$$

$|V_1| > c$ à l'intérieur de la bande critique. Sa valeur infinie pour $ka = \cos \alpha$ a été interprétée plus haut. L'onde (A_{-1}) de vitesse de phase :

$$(V-64) \quad V_{-1} = ka(c \sin \alpha)/(ka + \cos \alpha)$$

est ici négligeable, mais rapprochons-la de l'onde (A_1) dont elle a le même type de symétrie. Les ondes

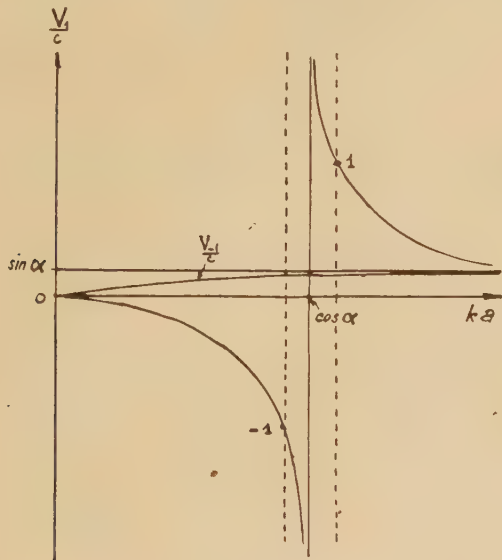


FIG. V-5 — Vitesse de phase des ondes élémentaires.

(A_1) et (A_{-1}) jouent le rôle des ondes d'ordre supérieur : $n = \pm 1$ guidées par la couche continue et étudiées en fin du chapitre II. La comparaison des résultats est intéressante. Les courbes de la figure V-5 ont été représentées en pointillé sur la figure II-8 b). On a tenu compte du fait que, pour $ka < \cos \alpha$ où $V_1 < 0$, la phase de l'onde reste constante pour θ croissant avec $-z$, dans le sens de propagation de la phase. La courbe V_{-1} ne se distingue pas, eu égard à la précision graphique, de la courbe correspondante I de la figure II-8 b). Les deux branches de l'hyperbole V_1 se raccordent respectivement à la courbe III et à la courbe C. Par conséquent les ondes (A_1) et (A_{-1}) du fil fin corres-

pondent manifestement aux modes supérieurs d'ordres ± 1 de la couche continue. D'ailleurs, l'identité des expressions (II-53) et (V-63), valable pour toute valeur de ka , puis de (II-54) et V-64), pour $|ka - \cos \alpha|$ suffisant, confirme numériquement la correspondance des résultats. Ceux-ci sont en désaccord dans une région sur la première bande critique. L'explication réside dans la différence de nature des deux types de circuit. Tout déplacement hélicoïdal d'axe Oz superpose la couche continue à elle-même tandis que seul les déplacements de pas h superposent le fil à lui-même. C'est précisément parce que ce dernier est, par rapport aux translations parallèles à Oz, une structure périodique, qu'il peut donner lieu à des vitesses de phase infinies. Cela se produit chaque fois que la spire d'hélice contient un nombre entier de longueurs d'onde.

L'extension des résultats aux autres valeurs de n est claire. La figure II-8 a) faisant connaître γa en fonction de ka est à rapprocher à la disposition des axes près, du diagramme de la figure V-4. On voit comment les courbes transcendentes de la première se raccordent aux hyperboles de la seconde.

Du point de vue des applications pratiques la conclusion de l'étude qui précède est la suivante : Bien qu'on soit parvenu à raccorder les modes supérieurs de la théorie de la couche continue aux ondes élémentaires de la théorie de l'hélice filiforme, les premiers ne sont pas utilisables dans les bandes centrées sur les bandes critiques où les ondes élémentaires d'ordre correspondant deviennent dominantes au voisinage de l'axe.

En ce qui concerne les valeurs des composantes du champ on peut vérifier que les expressions (II-46) sont bien de la forme (V-45 à 47) (à condition de prendre $-n$ pour l'hélice en raison du sens de propagation de la phase de A_n). Mais la correspondance des valeurs numériques est très médiocre, sauf pour les valeurs élevées de $\gamma_n a$.

Exemple numérique.

Reprenons l'exemple précédent. La première bande critique commence à $ka = 0,926$. Le calcul a été effectué pour la valeur voisine $ka = 0,9$ ($\lambda \simeq 2$ cm). Pour bien mettre en évidence la convergence des développements on s'est placé à la distance notable de l'axe : $r = a/2$. Le tableau suivant résume le calcul. Les valeurs des coefficients sont relatives à celle du coefficient c_1 .

	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
a_n	$2 \cdot 10^{-9}$	$-1,4 \cdot 10^{-5}$	$-8,3 \cdot 10^{-3}$	$-0,644$	$2,2 \cdot 10^{-3}$
$j\delta_n$	$0,7 \cdot 10^{-9}$	$0,2 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-3}$	$-0,333$	$-0,7 \cdot 10^{-3}$
$j\epsilon_n$	$22 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	1	$2,2 \cdot 10^{-3}$

c) RÉGIMES INTERMÉDIAIRES.

La substitution d'un mode dominant par le suivant, lorsque ka augmente, se fait de façon continue. Il arrive donc qu'au voisinage de l'axe les deux

ondes consécutives soient d'intensités comparables. Ainsi lorsque ka est voisin de 0,5 (spire voisine de $\lambda/2$) γ_0 et γ_1 ont des valeurs sensiblement égales. On est alors ramené à la discussion connue, de la propagation d'ondes de la forme :

$$E_r = e^{-jkz/\sin\alpha} [a_0(r) + a_1(r) e^{i(z/h-\theta)}, \dots]$$

d) RÉGIMES D'ANTENNE.

Bien que l'hélice illimitée ne constitue pas une antenne en hélice, nous désignerons cependant par « régime d'antenne » tout régime où la fréquence est intérieure à une bande critique, ce qui correspond aux conditions d'emploi des antennes. Pour fixer les idées évaluons le champ à l'extérieur du cylindre dans le cas particulier :

$$(V-65) \quad ka = \cos \alpha$$

où la spire d'hélice a pour longueur λ . D'après ce qui précède, on sait qu'à distance suffisante l'onde (A_1) est dominante. D'ailleurs, exprimée au moyen de fonctions de HANKEL, elle décroît à grande distance comme $1/\sqrt{r}$ tandis que tous les autres termes décroissent comme $e^{-\gamma_{nr}}/\sqrt{r}$. D'après (48) à (51) et (65) il est facile d'écrire les composantes cherchées :

(V-66)

$$\begin{aligned} E_r &= -j \frac{I\eta}{4} \cotg \alpha J'_1(\cos \alpha) \left[H_1^{(2)} \left(\frac{r}{a} \cos \alpha \right) \right]'_r e^{-j\theta} \\ E_\theta &= -\frac{I\eta}{4} \cotg \alpha J'_1(\cos \alpha) H_1^{(2)} \left(\frac{r}{a} \cos \alpha \right) e^{-j\theta} \\ E_z &= -\frac{I\eta}{4} \cos \alpha J'_1(\cos \alpha) H_1^{(2)} \left(\frac{r}{a} \cos \alpha \right) e^{-j\theta}. \end{aligned}$$

14. Champ au voisinage du fil.

L'hélice filiforme n'est qu'un modèle simplifié qu'on substitue à un conducteur de section finie. Les résultats obtenus sont donc d'autant plus proches de la réalité que le fil du conducteur réel est plus fin. Cependant, il est à présumer que les écarts ne seront sensibles qu'au voisinage du fil. A distance suffisante de celui-ci, on peut admettre que tout se passe comme si le courant qui parcourt le conducteur était concentré sur l'hélice moyenne. A proximité du fil, il est nécessaire de tenir compte de la répartition du courant sur la surface conductrice, d'où la nécessité d'une théorie du fil épais. Mais, si l'on se contente d'ordres de grandeur, des renseignements intéressants peuvent être tirés du calcul du champ au voisinage du fil sans épaisseur. La seule difficulté du calcul est la suivante : au voisinage de l'hélice, à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre, les séries qui donnent les composantes du champ sont lentement convergentes. Sur la surface du cylindre elles sont même divergentes. Or on peut tourner cette difficulté par le procédé qui consiste à retrancher, de ces séries, des séries de somme connue et telles que les différences soient rapidement convergentes.

Pour simplifier le calcul déplaçons-nous sur l'axe

Ox' ($\theta = 0, z = 0$). A la distance r de l'origine, le champ électrique sera donné par :

$$\begin{aligned} E_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) + a_{-n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r) \\ E_\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(r) = b_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r) + b_{-n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r) \\ E_z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) = c_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) + c_{-n}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r). \end{aligned} \quad (V-67)$$

Or les relations (28) conduisent à poser :

(V-68)

$$\begin{aligned} U'_n &= -2 \frac{I\eta}{4\pi a \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} \operatorname{ch} G(u) \operatorname{ch} u \sqrt{\operatorname{th} u} e^{-nF(u)} \\ V'_n &= 2j \frac{I\eta}{4\pi a \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} \operatorname{sh} G(u) \operatorname{sh} u \sqrt{\operatorname{th} u} e^{-nF(u)} \\ W'_n &= -2j \frac{I\eta}{4\pi a \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} \operatorname{sh} G(u) \sqrt{\operatorname{th} u} e^{-nF(u)} \end{aligned}$$

Les séries (68) sont des séries géométriques dont on aura immédiatement les sommes par :

$$(V-69) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nF(u)} = \frac{1}{e^{F(u)} - 1}.$$

D'autre part, quand on remplace U_n par son expression asymptotique U'_n , on commet une erreur de l'ordre de $e^{-nF(u)}/n$. On pourra donc remplacer la série (U_n) par la série de terme général :

$$(V-70) \quad U_n'' = U_n - U'_n$$

dont la convergence sera plus rapide. De même pour V_n et W_n .

Exemple numérique. — Reprenons l'exemple du § 13. Le fil utilisé a un diamètre égal à 0,5 mm. Calculons alors le champ à la distance : $r = a - 0,25 = 2,9 - 0,25 = 2,65$ mm de l'axe dans le cas de l'hélice filiforme. En se reportant aux notations du § 5 on pourra calculer :

$$\operatorname{sh} u = h/r = 0,0841$$

d'où :

$$u = 0,0840, \quad \operatorname{ch} u = 1,0035, \quad \operatorname{th} u = 0,2895,$$

puis :

$$F(u) = 1,1255, \quad e^{F(u)} = 3,0818, \quad 1/e^{F(u)} - 1 = 0,4804.$$

Enfin :

$$G(u) = 0,1795, \quad \operatorname{sh} G(u) = 0,1804, \quad \operatorname{ch} G(u) = 1,0161.$$

Alors :

$$\begin{aligned} U'_n &= -(I\eta/4\pi a \sin \alpha) 2,1264 e^{-nF} \\ j V'_n &= -(I\eta/4\pi a \sin \alpha) 0,0316 e^{-nF} \\ j W'_n &= (I\eta/4\pi a \sin \alpha) 0,3762 e^{-nF}. \end{aligned}$$

Sous-entendons, dans ce qui suit, le facteur $I/4\pi a \sin \alpha$, ce qui équivaut à donner au courant tI une valeur numérique particulière.

Le tableau suivant résume les calculs :

n	U_n	U'_n	jV_n	jV'_n	jW_n	jW'_n	U''_n	jV''_n	jW''_n
1	-0,6605	-0,6900	-0,0112	-0,0103	0,1230	0,1221	0,029 5	-0,000 9	0,000 9
2	-0,2189	-0,2239	-0,0035	-0,0033	0,0396	0,0396	0,005 0	-0,000 2	
3	-0,0716	-0,0727	-0,0011	-0,0011	0,0129	0,0129	0,001 1		
4	-0,0233	-0,0236	-0,0004	-0,0004	0,0041	0,0041	0,000 3		
5	-0,0076	-0,0077	-0,0001	-0,0001	0,0014	0,0014	0,000 1		
6	-0,0025	-0,0025	-0,0000	-0,0000	0,0004	0,0004	0,000 0		
							0,036	-0 001	0001

D'autre part, au même facteur près :

$$a_0 = -0,6233, \quad j b_0 = 0,0582, \quad j c_0 = -0,9116.$$

Alors en ne conservant que trois décimales :

$$E_r = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U'_n + 0,036 = -1,609.$$

De même :

$$E_\theta = -0,042 j, \quad E_z = 0,730 j.$$

Le champ est polarisé elliptiquement, mais il reste contenu dans un plan pratiquement normal à l'hélice (il fait avec la tangente à la courbe au point situé sur Ox un angle $90^\circ - 1,12^\circ$). Il faudrait que la polarisation soit rectiligne suivant Ox pour que la solution convienne au cas du fil épais. L'approximation commise en ne conservant que la composante E_r serait assez grossière. Elle pourrait cependant se justifier si le fil était suffisamment fin.

Reprenons les formules (68) et considérons un point sur Ox à la distance ρ de l'hélice filiforme. En négligeant les puissances de ρ supérieures à 1, il est facile de vérifier que :

$$F(u) \simeq \rho/a \sin \alpha, \quad \text{d'où : } 1/(e^{F(u)} - 1) \simeq a \sin \alpha / \rho$$

puis que :

$$U'_n \simeq -(I\eta/2\pi a \sin \alpha) e^{-nF},$$

de sorte que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} U'_n \simeq -I\eta/2\pi\rho;$$

lorsque ρ est très petit, le second membre est suffisamment grand pour qu'on le considère comme la partie principale de E_r .

On a alors sensiblement :

$$(V-71) \quad E_r \simeq I\eta/2\pi\rho$$

(dans le vide :

$$E_r \simeq 60 I/\rho$$

tandis que E_θ et E_z comme on le constate par un

calcul analogue, restent finis. Il est donc raisonnable de réduire le champ à sa composante E_r . L'expression (V-71) fournit ainsi un ordre de grandeur du champ à la surface d'un fil dont la section a pour rayon ρ . Mais cet ordre de grandeur n'est vraiment significatif que si le fil est assez fin. On constate alors par (V-71) que le résultat est le même que pour le fil rectiligne.

Remarque. — Comme il était à prévoir, les résultats sont totalement différents de ceux qu'on avait obtenus pour la couche continue.

L'hélice à fil fin conduit au même résultat que tout circuit à fil fin. Le champ est partout fini, mais au voisinage du fil il varie comme $1/\rho$. Dans le cas de la couche continue, on ne peut pas discerner le fil sur le cylindre qui le porte, et le champ à petite distance ρ de celui-ci décroît sensiblement comme $e^{-\gamma\rho}$.

15. Champ sur la surface du cylindre.

Il est défini par des séries divergentes mais sommables ($C, 1$) pourvu qu'on soit en dehors de l'hélice. Le calcul numérique peut être effectué en utilisant les résultats rappelés dans l'annexe B (formule (25)). En particulier, il est intéressant de noter que le champ ainsi calculé sur la surface représente bien la limite du champ intérieur (ou extérieur) lorsque l'on se déplace sur une rayon qui n'aboutit pas à l'hélice. La continuité du champ électromagnétique à travers le cylindre est ainsi assurée par la valeur de sommes généralisées de séries divergentes.

ANNEXE AU CHAPITRE V

A. EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DES FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES.

Formules de Nicholson.

J. W. NICHOLSON a établi [23] les formules suivantes :

$$(1) \quad I_n(x) = \sqrt{T/2\pi x} e^t$$

$$(2) \quad K_n(x) = \sqrt{\pi T/2x} e^{-t}$$

où

$$(3) \quad T/x = (x^2 + n^2)^{-1/2} - \lambda_2 (x^2 + n^2)^{-3/2} + \lambda_4 (x^2 + n^2)^{-5/2} - \dots$$

$$(4) \quad t = \left[1 - \mu_2 \frac{d}{n dn} - \mu_4 \left(\frac{d}{n dn} \right)^2 + \dots \right] \left[\sqrt{x^2 + n^2} - \frac{n}{2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{x^2 + n^2} + n}{\sqrt{x^2 + n^2} - n} \right]$$

avec

$$(5) \quad \lambda_2 = -1/8, \quad \lambda_4 = (27 - 96 n^2)/2^7$$

et

$$(6) \quad 1 + \mu_2 x + \mu_4 x^2 + \dots = (1 + \lambda_2 x + \lambda_4 x^2 + \dots)^{-1}.$$

Ces formules sont valables quel que soit x réel positif. En limitant le nombre des termes dans les développements l'approximation est d'autant meilleure que n est grand. En particulier, pour n convenable, on peut, en s'arrêtant au premier ordre, obtenir des expressions remarquablement simples :

$$(7) \quad I_n(x) = (1/\sqrt{2\pi\sqrt{x^2+n^2}}) e^{\sqrt{x^2+n^2} - (n/2) \operatorname{Log}[(\sqrt{x^2+n^2}+n)/(\sqrt{x^2+n^2}-n)]}$$

$$(8) \quad K_n(x) = \sqrt{\pi/2\sqrt{x^2+n^2}} e^{-\sqrt{x^2+n^2} + (n/2) \operatorname{Log}[(\sqrt{x^2+n^2}+n)/(\sqrt{x^2+n^2}-n)]}$$

Expressions de $I_{n+\tau}(\gamma_n r)$ et $K_{n+\sigma}(\gamma_n a)$:

Les expressions (V-14) à (V-16) du champ de l'hélice contiennent des termes en $I_{n+\tau}(\gamma_n r)$ et $K_{n+\sigma}(\gamma_n a)$ où les indices ρ et τ ont les valeurs $-1, 0, 1$. D'autre part pour n positif et grand, on a :

$$(9) \quad \gamma_n = \sqrt{(n/h - \beta)^2 - k^2} \simeq n/h - \beta - k^2 h/2n + \dots$$

$$(10) \quad \gamma_{-n} = \sqrt{(n/h + \beta)^2 - k^2} \simeq n/h + \beta - k^2 h/2n + \dots$$

Pour appliquer les formules (7) et (8) on est donc amené à considérer des expressions telles que :

$$(11) \quad \gamma_n^2 r^2 + (n + \sigma)^2 = n^2 (r^2/h^2 + 1) - 2n(\beta r^2/h - \sigma) + (\beta^2 - k^2) r^2 + \sigma^2.$$

Il est commode, pour la suite des calculs, d'introduire la variable auxiliaire u :

$$(12) \quad \operatorname{sh} u = h/r$$

avec $u = u_0$ pour $r = a$.

Ainsi :

$$\gamma_n^2 r^2 + (n + \sigma)^2 \simeq n^2 \coth^2 u - 2n(\beta h/\operatorname{sh}^2 u - \sigma) + \dots$$

Il vient alors en appliquant (7) et (8) :

$$(13) \quad I_{n+\tau}(\gamma_n r) \simeq (1/\sqrt{2\pi n \coth u}) e^{n(\coth u - u) - (\beta h \coth u + \tau u)}$$

$$(14) \quad K_{n+\sigma}(\gamma_n a) \simeq (\pi/\sqrt{2n \coth u_0}) e^{-n(\coth u_0 - u_0) + \beta h \coth u_0 + \sigma u_0}$$

d'où :

$$(15) \quad K_{n+\sigma}(\gamma_n a) I_{n+\tau}(\gamma_n r) \simeq \frac{e^{-n[\coth u_0 - u_0 - (\coth u - u)] + \beta h (\coth u_0 - \coth u) + \sigma u_0 - \tau u}}{2n\sqrt{\coth u_0 \coth u}}.$$

De même, n étant toujours positif, on a :

$$(16) \quad K_{n+\sigma}(\gamma_{-n} a) I_{n+\tau}(\gamma_{-n} r) \simeq \frac{e^{-[\coth u_0 - u_0 - (\coth u - u)] - \beta h (\coth u_0 - \coth u) + \sigma u_0 - \tau u}}{2n\sqrt{\coth u_0 \coth u}}.$$

A l'intérieur du cylindre ($r < a$), on a : $u > u_0$ et

$$F(u) = \coth u_0 - u_0 - (\coth u - u) > 0.$$

Cas particulier. — Sur la surface du cylindre : $u = u_0$, les expressions précédentes se simplifient alors considérablement. Reprenant le calcul avec un terme supplémentaire en $1/n$, utile pour la discussion on obtient :

$$K_{n+\sigma}(\gamma_n a) I_{n+\tau}(\gamma_n a) \simeq \frac{e^{(\sigma-\tau)u_0}}{2n \coth u_0} \left\{ 1 + \frac{2\beta h [1 + (\sigma-\tau) \operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_0] - (\sigma+\tau) \operatorname{sh}^2 u_0 + (\sigma^2 - \tau^2) \operatorname{sh} u_0 \operatorname{ch} u_0}{2n \operatorname{ch}^2 u_0} \right\}$$

$$\gamma_n K_{n+\sigma}(\gamma_n a) I_{n+\tau}(\gamma_n a) \simeq \frac{e^{(\sigma-\tau)u_0}}{2h \coth u_0} \left\{ 1 + \frac{2\beta h [(\sigma-\tau) \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0] - (\sigma+\tau) \operatorname{sh} u_0 + (\sigma^2 - \tau^2) \operatorname{ch} u_0}{2n \operatorname{ch}^2 u_0} \right\}.$$

En changeant β en $-\beta$ il vient les expressions relatives à γ_{-n} . Ainsi on aura :

$$(19) \quad \gamma_n K_n I_{n-1} \simeq \frac{e^{u_0}}{2h \coth u_0} \left[1 + \frac{(2\beta h - 1) e^{-u_0} \operatorname{sh} u_0}{2n \operatorname{ch}^2 u_0} \right]$$

$$\gamma_n K_n I_{n+1} \simeq \frac{e^{-u_0}}{2h \coth u_0} \left[1 - \frac{(2\beta h + 1) e^{u_0} \operatorname{sh} u_0}{2n \operatorname{ch}^2 u_0} \right]$$

$$K_{n+\sigma} I_{n+\sigma} \simeq \frac{1}{2n \coth u_0} \left[1 + \frac{\beta h - \sigma \operatorname{sh}^2 u_0}{n \operatorname{ch}^2 u_0} \right]$$

et relativement à l'argument γ_{-n} :

$$(20) \quad \gamma_{-n} K_n I_{n-1} \simeq \frac{e^{u_0}}{2h \coth u_0} \left[1 - \frac{(2\beta h + 1) e^{-u_0} \operatorname{sh} u_0}{2n \operatorname{ch}^2 u_0} \right]$$

$$\gamma_{-n} K_n I_{n+1} \simeq \frac{e^{-u_0}}{2h \coth u_0} \left[1 - \frac{(2\beta h - 1) e^{u_0} \operatorname{sh} u_0}{2n \operatorname{ch}^2 u_0} \right]$$

$$K_{n+\sigma} I_{n+\sigma} \simeq \frac{1}{2n \coth u_0} \left[1 - \frac{\beta h + \sigma \operatorname{sh}^2 u_0}{n \operatorname{ch}^2 u_0} \right].$$

B. CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS DES COMPOSANTES DU CHAMP.

Précisons ici quelques points relatifs aux séries trigonométriques utilisées dans le chapitre.

Posons $x = e^{-F(u)}$ (voir (V-24)) ; x est fonction continue de u , croissant de 0 à 1 lorsque r croît de 0 à a . On pourra inverser cette fonction. Posons en outre pour abrégir : $\zeta = z/h - \theta$. Les formules (V-36) rapprochées de (V-28) et (V-29) montrent que les diverses séries utilisées sont de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n u_n(x) \cos n\zeta \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n u_n(x) \sin n\zeta$$

avec

$$(21) \quad u_n(u) = A(x) + B(x)/n + \lambda_n(x)/n^2$$

où $A(x)$, $B(x)$ et $\lambda_n(x)$ sont continues dans l'intervalle fermé (0,1). En particulier sur le cylindre :

$$(22) \quad u_n(1) = A(1) + B(1)/n + \lambda_n(1)/n^2$$

$u_n(x)$ est calculé à partir des fonctions I_ν et K qui sont analytiques par rapport à ν quelconque. En outre, la valeur $x=1$ correspond à une valeur ordinaire $r=a$. $\lambda_n(x)$ est donc uniformément borné dans l'intervalle fermé $(0,1)$. On est ramené à un problème connu.

a) Supposons $\zeta \neq 2k\pi$. Pour $x < 1$, la série

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n u_n(x) \cos n\zeta \\ &= A(x) \sum x^n \cos n\zeta + B(x) \sum x^n \cos n\zeta/n \\ &\quad + \sum x^n \lambda_n(x) \cos n\zeta/n^2 \end{aligned}$$

est absolument convergente. Pour $x=1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1) \cos n\zeta$$

est divergente. Mais elle est sommable $(C, 1)$.

Comme la série divergente usuelle $1/2 + \cos \zeta + \cos 2\zeta + \dots + \cos n\zeta + \dots$ a 0 pour somme $(C, 1)$ ($\zeta \neq 2k\pi$), et que les séries $\sum \cos n\zeta/n$ et $\sum \lambda_n(1) \cos n\zeta/n^2$ convergent, la série (24) a pour somme $C, 1)$:

$$(25) \quad \sigma = -A(1)/2 - B(1) \operatorname{Log} 2 \sin \zeta/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(1) \cos n\zeta/n^2.$$

La correspondance connue [49] entre les méthodes de sommation d'ABEL et de CÉSARO conduit alors ici au résultat suivant : lorsque x tend vers 1, la somme $F(x)$ tend vers la somme généralisée σ .

b) Supposons $\zeta = 2k\pi$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$ est alors essentiellement divergente.

Une étude analogue peut être faite pour les séries en $\sin n\zeta$.

CHAPITRE VI

CIRCUITS DU TYPE COAXIAL

1. Lignes à retard.

Les méthodes de calcul des chapitres II et V peuvent être étendues à certains circuits comprenant un enroulement en hélice. Les problèmes suivants peuvent ainsi être résolus : problème de l'hélice protégée par un écran cylindrique de même axe, de l'hélice enroulée autour d'un cylindre conducteur, de l'hélice glissée à l'intérieur d'une ligne coaxiale. Pour fixer les idées, on se bornera au premier. C'est le circuit type de la ligne à retard à constantes réparties. C'est aussi, dans une certaine mesure, l'arrangement utilisé par SERVANT et LOUDETTE [31].

Le retard linéique d'une ligne à retard continue est obtenu en première approximation à partir des valeurs du coefficient d'inductance propre et de la

capacité linéique de l'enroulement en régime quasi stationnaire. Cette approximation est insuffisante en haute fréquence. Le calcul a été amélioré en traitant l'enroulement comme une nappe à conductivité latérale le long de laquelle se propage une onde de révolution [3]. Il reprenait la théorie de la ligne à conducteur unique de SOMMERFELD. Le rôle de l'écran n'était pas pris en considération. Ce rôle a été souligné par LAPOSTOLLE [19]. On a vu au chapitre II que les enroulements en hélice ont pour effet de concentrer fortement le champ. L'effet d'un écran ne sera donc sensible que s'il est très près de l'enroulement. Les hélices des lignes à retard sont à spires jointives. La méthode de la couche continue s'impose. Il suffit de reprendre le calcul du chapitre II. A l'intérieur de l'enroulement on a le champ (II-6), mais entre l'enroulement et l'écran on devra prendre une combinaison linéaire de (II-6) et (II-7).

$$E_r = A' \beta K_1(\gamma r) - A'' \beta I_1(\gamma r), \dots$$

Les conditions aux limites sont celles du chapitre II sur la couche $r=a$. Les conditions supplémentaires : $E_\theta = E_z = 0$, sur l'écran $r=b$, permettent d'évaluer les nouvelles constantes d'intégration. La condition de compatibilité (II-13) est alors remplacée par :

$$(VI-1) \quad \gamma^2 \frac{I_0(\gamma a) I_1(\gamma b)}{I_0(\gamma b) I_1(\gamma a)} \frac{I_0(\gamma a) K_0(\gamma b) - I_0(\gamma b) K_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a) K_1(\gamma b) - I_1(\gamma b) K_1(\gamma a)} = k^2 \cot^2 \alpha$$

qui s'y réduit si l'on fait $b = \infty$.

Bornons-nous aux valeurs relativement grandes du paramètre $ka \cot \alpha$ (quelques unités). Il est facile de tirer de (4) l'expression approchée de la vitesse de l'onde pour $(b-a)$ assez petit :

$$(VI-2) \quad v = c \sin \alpha [1 + (b-a) \sin \alpha \cos \alpha / 4ka^2].$$

En comparant à (II-22) on voit que l'écran a pour effet de ralentir l'onde. La vitesse de celle-ci tend vers la vitesse projetée $c \sin \alpha$ lorsque l'écran tend vers l'enroulement. D'un autre côté les deux vitesses (2) et (II-22) sont égales pour

$$(VI-3) \quad k(b-a) \cot \alpha = 1$$

d'où un ordre de grandeur commode pour la distance $(b-a)$ au delà de laquelle l'écran cesse d'agir.

Remarques :

1. L'hélice étant à spires serrées il est commode d'introduire le nombre de spires par unité de longueur : $n_1 = 1/2 \pi a \tan \alpha$. On peut alors écrire pour α petit :

$$(VI-4) \quad v = (c/2\pi a n_1) [1 + (\lambda/n_1) (b/a - 1) (1/4 \pi a)^2].$$

2. On s'est borné ici à signaler la perturbation apportée par l'écran à la propagation de l'onde principale du chapitre II. On n'a pas abordé la recherche de toutes les solutions de l'équation (VI.1).

Tension et impédance :

En ondes ultra-courtes la notion de tension est tout à fait artificielle. En ce qui concerne la ligne à

retard, on a donné des définitions fort discutables [3]. Considérons l'écran comme un conducteur de « retour ». Il est alors acceptable d'introduire, par analogie avec le cas du coaxial, la circulation du champ électrique entre la couche et l'écran. On obtient :

(VI-5)

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{\eta}{2\pi k} I I_0(\gamma a) \left[K_0(\gamma a) - I_0(\gamma a) \frac{K_0(\gamma b)}{I_0(\gamma b)} \right]$$

où I désigne comme précédemment le courant dans l'enroulement. Sous la forme (5) on voit qu'on retrouve bien l'expression (II-39) pour γb assez grand.

On peut alors associer à la tension V l'impédance caractéristique de la ligne à retard :

(VI-6)

$$Z_c = \frac{V}{I} = \frac{\eta}{2\pi k} \frac{I_0(\gamma a)}{I_0(\gamma b)} [I_0(\gamma b) K_0(\gamma a) - I_0(\gamma a) K_0(\gamma b)]$$

où le facteur $\eta/2\pi$, usuel dans la théorie des lignes, vaut 60 ohms dans le vide, $60/\sqrt{\epsilon_r}$ ohms si l'enroulement est isolé de l'écran par un diélectrique de constante relative ϵ_r .

Remarque. — Sur la surface interne de l'écran on a :

$$H_\theta = (I/2\pi b) I_0(\gamma a)/I_0(\gamma b)$$

d'où sur celle-ci l'intensité de courant $2\pi b H_\theta = I I_0(\gamma a)/I_0(\gamma b)$. La ligne n'est pas équilibrée au sens où on l'entend habituellement. On se rapproche d'autant plus de l'équilibrage que l'écran est plus voisin de l'enroulement. La ligne est alors à faible impédance et celle-ci est sensiblement égale à :

$$(VI-7) \quad Z_c = \eta n_1 (b-a) I_0(\gamma a)/I_0(\gamma b) \sim \eta n_1 (b-a).$$

Si, au contraire, l'écran est éloigné on aura :

$$Z_c \sim (\eta/2\pi) (\beta/k) I_0(\gamma a) K_0(\gamma a).$$

A partir de la vitesse de propagation v et de l'impédance caractéristique Z_c , on pourra remonter aux constantes primaires de la ligne par les formules usuelles :

$$L = Z_c/v \\ C = 1/vZ_c.$$

Exemple. — Supposons γa assez grand (quelques unités) et l'écran éloigné de la couche. On peut prendre :

$$Z_c = (60/\sin \alpha) I_0(\gamma a) K_0(\gamma a) \sim 15\lambda/\pi a. \\ v = c \sin \alpha \simeq 3 \cdot 10^8/2\pi a n_1$$

d'où :

$$L \simeq n_1 \lambda 10^{-7} \text{ H/m}$$

ordre de grandeur du coefficient de self-induction linéique en très haute fréquence. La formule de BLEWETT [3] qui est discutable dans les conditions envisagées donnerait :

$$L = 2\pi a n_1^2 10^{-7} = n_1 \lambda \cotg \alpha 10^{-7} \text{ H/m}.$$

L est dans les deux cas inversement proportionnel à la fréquence, mais les deux valeurs que nous trouvons sont dans le rapport $\cotg \alpha$, qui est ici très élevé.

2. Cas d'une hélice lâche.

On peut avoir à étudier la propagation d'une onde guidée par une hélice sous écran, dans le cas où le fil est trop fin par rapport au pas pour que le modèle de la couche continue soit légitime. On remplacera alors l'enroulement par une hélice sans épaisseur à laquelle on peut appliquer la méthode du chapitre V. Le calcul n'est pas difficile mais fastidieux. Nous nous bornerons à le résumer. Pour abréger, nous introduirons les notations simplifiées suivantes : $A, B, C, \dots$, pour les coefficients $A_n, B_n, C_n, \dots$, $I_n(r), I_n(a), I_n(b), \dots$ pour $I_n(\gamma n r), I_n(\gamma n a), I_n(\gamma n b), \dots$

On partira des coefficients des développements en séries trigonométriques habituels :

$$a_n(r) = A I_{n-1}(r) + B I_{n+1}(r)$$

$$(VI-8) \quad j b_n(r) = A I_{n-1}(r) - B I_{n+1}(r)$$

$$j c_n(r) = -[\gamma n/(n/h - \beta)](A + B) I_n(r)$$

à l'intérieur de l'enroulement :

(VI-9)

$$a_n(r) = A' I_{n-1}(r) + B' I_{n+1}(r) + C' K_{n-1}(r) + D' K_{n+1}(r) \\ j b_n(r) = A' I_{n-1}(r) - B' I_{n+1}(r) + C' K_{n-1}(r) - D' K_{n+1}(r) \\ j c_n(r) = -[\gamma n/(n/h - \beta)][(A' + B') I_n(r) - (C' + D') K_n(r)]$$

dans la région annulaire : $a < r < b$.

Les conditions aux limites sont les conditions (V-10) sur le cylindre $r = a$:

$$(VI-10) \quad (A - A') I_{n-1}(a) + (B - B') I_{n+1}(a) \\ = C' K_{n-1}(a) + D' K_{n+1}(a) + A/\pi.$$

Il suffit de remplacer dans (V-10). A par $A - A'$ et B par $B - B'$. Par conséquent, on aura d'après (V-13) sans nouveau calcul :

(VI-11)

$$A - A' = (I\eta/4\pi k) [-\beta \gamma_n K_n(a) + k^2 \cotg \alpha K_{n-1}(a)] \\ B - B' = (I\eta/4\pi k) [-\beta \gamma_n K_n(a) - k^2 \cotg \alpha K_{n+1}(a)] \\ C' = (I\eta/4\pi k) [\beta \gamma_n I_n(a) + k^2 \cotg \alpha I_{n-1}(a)] \\ D' = (I\eta/4\pi k) [\beta \gamma_n I_n(a) - k^2 \cotg \alpha I_{n+1}(a)].$$

Les conditions aux limites sur l'écran $r = b$: $E_\theta = E_z = 0$ permettront d'obtenir les inconnues supplémentaires :

(VI-12)

$$A' I_{n-1}(b) - B' I_{n+1}(b) + C' K_{n-1}(b) - D' K_{n+1}(b) = 0 \\ (A' + B') I_n(b) - (C' + D') K_n(b) = 0.$$

Posons :

$$(VI-13) \quad 2 F_n(b) = K_n(b)/I_n(b) + K'_n(b)/I'_n(b), \\ 2 G_n(b) = 1/b \gamma_n I_n(b) I'_n(b).$$

On trouve :

$$(VI-14) \quad A' = \frac{I\eta}{4\pi k} \left\{ \beta \gamma_n I_n(a) \frac{K_n(b)}{I_n(b)} \right. \\ \left. + k^2 \cotg \alpha [I_{n-1}(a) F_n(b) - I_{n+1}(a) G_n(b)] \right\} \\ B' = \frac{I\eta}{4\pi k} \left\{ \beta \gamma_n I_n(a) \frac{K_n(b)}{I_n(b)} \right. \\ \left. + k^2 \cotg \alpha [I_{n-1}(a) G_n(b) - I_{n+1}(a) F_n(b)] \right\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le champ en tout point à l'intérieur de l'écran. Observons simplement que la solution obtenue est, d'après (11), la superposition de la solution relative

à l'hélice isolée et d'un champ complémentaire défini par (14). Celui-ci reste fini sur le fil. On en conclut que la vitesse de l'onde de long du fil est encore égale à c . Ce résultat est d'ailleurs compréhensible. L'hypothèse faite sur le conducteur équivaut à négliger la réaction sur celui-ci des conducteurs voisins.

CHAPITRE VII

COMPARAISON DE LA THÉORIE AVEC L'EXPÉRIENCE

1. Généralités.

Pour terminer ce travail, nous allons juger de la valeur des modèles proposés, à la lumière de quelques résultats expérimentaux. En ce qui concerne les problèmes actuels, la documentation publiée n'est malheureusement pas abondante. On peut déjà tirer, néanmoins, des enseignements intéressants des résultats de mesures connus : confirmation de la théorie en basse fréquence (régime de tube à ondes progressives), difficultés d'interprétation en haute fréquence (régime d'antenne), rôle des paramètres négligés par la définition même du modèle simplifié (diamètre du fil, atténuation, ...).

Les mesures directes relatives à la propagation d'ondes le long d'une hélice : vitesse, répartition du courant, du champ, sont des mesures difficiles. On ne peut pas escompter une grande précision. La mesure de la vitesse de propagation est l'une des plus importantes à effectuer. Outre son utilité immédiate (effet retardateur des hélices) elle fournit le moyen le plus direct d'éprouver la théorie. Elle permet de mettre en évidence le rôle des paramètres secondaires. La méthode, usuelle dans la technique des lignes et des guides, consiste à déterminer la longueur des ondes stationnaires produites par réflexion sur un écran terminal. JESSEL et WALLAUSCHEK [13] ont fait plonger l'hélice verticale dans un bain de mercure. La forte concentration du champ autour de l'hélice rendait inutile l'emploi d'un écran coaxial. Dans les expériences de CUTLER [5] l'hélice aboutissait simplement à un disque métallique. On peut rattacher à ces mesures directes celles des fréquences propres des bobines mentionnées dans l'Introduction. Ce sont des méthodes de résonance utilisant la formule de THOMSON. Les résultats publiés sont assez nombreux, mais difficiles à exploiter dans le cadre des théories développées ici. Celles-ci s'appliquent difficilement au cas des bobines courtes presque entièrement situées dans les régions perturbées des faces terminales.

CUTLER a étudié la répartition du champ en vue d'applications au tube à ondes progressives. Le circuit de celui-ci ne se prête pas à un sondage direct. Aussi CUTLER a-t-il opéré sur un modèle agrandi, sept fois environ. Les mesures effectuées en régime de basse fréquence sont en bon accord avec la théorie de la couche, sauf, naturellement, au voisinage

du circuit. Elles restituent au champ sa dyssymétrie, masquée par le modèle utilisé. Les composantes transversales E_θ et E_r sont cependant affectées d'une légère erreur systématique que CUTLER attribue à une discrimination insuffisante de la sonde. L'accord avec la théorie au voisinage de la couche peut être amélioré si l'on tient compte des termes correctifs fournis par la théorie de l'hélice filiforme.

La répartition du courant sur une antenne en hélice a été relevée récemment par MARSH [21]. Cet auteur a fait glisser un petit cadre le long d'une fente pratiquée dans le tube qui constitue l'hélice. Les lignes de champ magnétique qui entourent ce tube traversent la partie émergente du cadre et induisent le long de celui-ci un courant qui mesure indirectement le courant d'antenne. Les résultats de MARSH soulèvent de très grosses difficultés d'interprétation sur lesquelles nous reviendrons.

On peut juger de la difficulté de vérifier les théories par l'observation suivante. Soient d le diamètre du fil et $p = 2\pi h$ le pas de l'hélice. Les modèles proposés supposent d'abord que le fil est fin : $d \ll a$. Ils sont donc *a priori* d'autant plus acceptables que le paramètre :

$$(VII-1) \quad \delta = d/a$$

est plus petit. D'autre part, les spires de l'enroulement sont plus ou moins rapprochées suivant que le second paramètre :

$$(VII-2) \quad \sigma = d/p$$

varie entre un nombre pratiquement égal à 1 et 0. On a entre δ et σ la relation :

$$(VII-3) \quad \delta = 2\pi\sigma \operatorname{tg} \alpha.$$

Le modèle de la couche continue est suggéré par le cas $\sigma = 1$, celui de l'hélice filiforme par le cas $\sigma = 0$. Il est à présumer que pour les valeurs intermédiaires ($\sigma \simeq 0,5$) l'accord entre la théorie et l'expérience sera le plus difficile à obtenir. Voici, pour fixer les idées, quelques valeurs numériques :

	δ	σ	$\cotg \alpha$
Tube CNET	0,17	0,36	13,1
Hélices de JESSEL et WALLAUSCHEK	0,12 à 0,25	0,22 à 0,47	11,9 à 12,5
Hélice de CUTLER	0,28	0,52	11,7
Antenne en hélice	0,03 à 0,38	0,02 à 0,24	2,8 à 5,6

Ainsi le circuit de CUTLER est plus épais et plus serré que ceux du CNET. Les antennes sont au contraire des hélices plus lâches.

2. Vitesse de propagation en basse fréquence.

Rappelons que nous entendons par régimes de basse fréquence pour une hélice ceux pour lesquels la variable ka est relativement faible ($ka < 0,5$). L'hélice du tube à ondes progressives est en régime de basse fréquence vers 3.000 MHz. En revanche les

antennes en hélices fonctionnent en régime de haute fréquence ($ka \simeq 1$) vers 300 MHz seulement.

Les mesures en basse fréquence ont été entreprises en vue de la réalisation du tube à ondes progressives et, par la même occasion, de la vérification de la théorie de la couche continue.

a) Mesures de CUTLER :

CUTLER mentionne simplement l'étude entre 625 et 8.220 MHz de l'hélice d'un tube à ondes progressives prévu pour 4.000 MHz. Les mesures de vitesse ont fourni quatre points qui, autant que l'échelle de la figure permette d'en juger, sont rigoureusement situés sur la courbe théorique. Une cinquième mesure effectuée en basse fréquence (625 MHz) a donné un résultat supérieur de 10 % à la vitesse théorique.

Par conséquent, sauf vers les fréquences les plus basses, les résultats de CUTLER justifient d'une manière remarquable le modèle de la couche continue.

b) Mesures de JESSEL et WALLAUSCHEK.

Elles sont plus complètes que celles de CUTLER. Le rôle des paramètres secondaires a été systématiquement étudié et les difficultés d'interprétation dues à l'imprécision des mesures ($\pm 3\%$) nettement soulignées. Dans l'ensemble les prévisions théoriques sont assez bien suivies par l'expérience. En particulier, la variation de la vitesse avec la fréquence est bien conforme au résultat du chapitre II. Les valeurs mesurées par les auteurs sur une hélice déterminée ($\delta = 0,15$, $\sigma = 0,26$) ne sont inférieures que de 0,9 à 1,7 % aux valeurs théoriques ([13], fig. 7). Ce décalage peut être attribué au diamètre

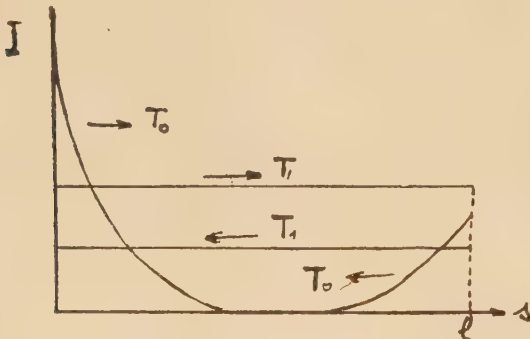


FIG. VII-1 — Répartition du courant sur une antenne en hélice.

du fil. Il pourrait également tenir au fait qu'on a défini le modèle par des valeurs plus ou moins arbitraires de a (rayon moyen) et de α (hélice moyenne). Des expériences multipliées permettraient de dégager des règles empiriques.

Les auteurs ont constaté qu'une augmentation du diamètre du fil tend à réduire la vitesse de propagation ([13], fig. 5). Pour une hélice : $a = 2,85$ mm, $p = 1,5$ mm et pour $\lambda = 10$ cm, v diminue d'environ 5 % lorsque d croît de 0,33 à 0,70 mm. La nature du conducteur, fer ou cuivre, est pratiquement indifférente. LAPOSTOLLE [19] compare cet effet, paradoxal à première vue, à l'augmentation de la vitesse de phase avec l'atténuation dans les guides.

Nous proposons l'explication suivante. Supposons le fil assez fin et sa courbure assez faible pour qu'il se comporte sensiblement comme un conducteur rectiligne. La théorie de POINCARÉ-SOMMERFELD de celui-ci montre, qu'à très haute fréquence, la vitesse de propagation de l'onde principale (E) le long du fil croît vers c avec le produit $d\sqrt{f}$. Des variations dans le même sens du diamètre ou de la fréquence auront donc les mêmes effets, apparents ou réels, sur la vitesse. Or, dans un enroulement en hélice, l'augmentation de fréquence a pour effet de diminuer légèrement la vitesse. Il faut reconnaître, toutefois, que cette interprétation conduit à des variations de vitesse plus faibles que celle que JESSEL et WALLAUSCHEK ont observée.

L'accroissement de la vitesse de propagation avec la longueur d'onde peut être interprétée comme un effet de couplage entre spires voisines. La capacité entre spires réduit l'inductance répartie et, le couplage croissant avec λ , il en résulte une augmentation corrélative de la vitesse. Ce langage permet de comprendre la transition entre les deux modèles envisagés. On pourrait décrire grossièrement le phénomène par l'image suivante. Le fil n'est jamais conducteur parfait. A fréquence extrêmement élevée il guide une onde qui tend à se concentrer dans son voisinage immédiat. Le couplage entre spires est extrêmement faible. On a l'image du fil très fin. L'onde est guidée le long de celui-ci à une vitesse très voisine de c . Supposons que la fréquence diminue. Le champ tend à s'étaler et le couplage entre spires voisines devient sensible. En un point d'une spire une petite composante de champ due à l'action de la spire précédente s'ajoute au champ qui a parcouru la spire complète et a pris, par conséquent, un retard de phase ($k \times$ longueur de la spire). La composition des deux champs tend à réduire légèrement ce retard de phase d'où une augmentation apparente de la vitesse sur le fil, qui devient ainsi supérieure à c . On est alors en accord avec le modèle de la couche.

3. Vitesse de propagation en haute fréquence.

Entendons par haute fréquence celle pour laquelle la spire devient voisine de λ (et éventuellement les fréquences supérieures). Les antennes en hélice fonctionnent dans ces conditions. Les expériences dont les résultats ont été publiés ont été effectuées sur des antennes, c'est-à-dire des hélices courtes (moins de 10 spires) et non sur des hélices illimitées. Cette observation est essentielle.

MARSH a étudié la propagation du courant le long d'une antenne en hélice [24]. Si celle-ci était très fine on devrait constater, conformément à la théorie développée au chapitre V, que la vitesse des ondes de courant est sensiblement égale à c , quelle que soit la fréquence de travail. Or les conclusions de MARSH sont nettement différentes. Cet auteur a observé des ondes stationnaires de courant dont la complexité croît avec la fréquence et dont il a donné une

interprétation judicieuse. Lorsque la fréquence est suffisamment basse ($ka < 2/3$) on reconnaît la superposition usuelle d'une onde progressive et de l'onde réfléchie par l'extrémité libre de l'antenne. La vitesse de ces ondes est d'abord légèrement supérieure à c et décroît avec λ . On est dans le cas du paragraphe précédent mais avec un couplage entre spires beaucoup plus lâche.

En haute fréquence $3/4 < ka < 4/3$. MARSH rend compte de la répartition du courant par la superposition de quatre ondes progressives. D'une part deux ondes (incidente et réfléchie) du type précédent mais fortement atténuées au cours de leur propagation. D'autre part, deux ondes d'un mode supérieur non atténuées.

A mesure que la fréquence augmente, de nouveaux modes apparaissent. Chacune des ondes de mode supérieur a une vitesse c' inférieure à c et tendant vers c lorsque la fréquence augmente. Bien entendu, la transition est continue entre deux régimes successifs.

L'existence de ces ondes de courant soulève une très grosse difficulté d'interprétation. La théorie du fil fin n'en rend compte qu'asymptotiquement : droite d'ordonnée $c' = c$. L'écart, de l'ordre de 20 % pour $ka \simeq 1$, tombe à 10 % pour $ka = 4/3$. On ne peut pas identifier les modes supérieurs à ceux qu'on a ainsi désignés aux chapitres II et V et qui correspondent à la propagation axiale des ondes électromagnétiques guidées. KRAUS, dans un ouvrage récent sur les antennes [43] mentionne une certaine théorie de l'hélice, non publiée, dont il ne donne que les résultats. La théorie de BAGBY apparaît comme une théorie du premier ordre, acceptable pour les basses fréquences seulement.

Devant la difficulté de faire tenir les propriétés de l'antenne en hélice dans le cadre d'une théorie de l'hélice illimitée, on peut se demander si le problème est bien posé. Il n'est pas impossible qu'une théorie plus raffinée, tenant compte du diamètre du fil et de l'atténuation des ondes, parvienne à expliquer le ralentissement des ondes de courant. Il n'est cependant pas déraisonnable de comparer la situation à celle qui s'est présentée dans le développement de la théorie des antennes rectilignes. L'image d'une ligne sans pertes s'est d'abord imposée. L'impossibilité de rendre compte des propriétés rayonnantes de l'antenne a suggéré d'amortir la ligne. L'énergie rayonnée par une antenne était identifiée à l'énergie consommée par effet Joule dans la ligne équivalente. Cette représentation a pour conséquence nécessaire un ralentissement des ondes attribué aux pertes par rayonnement. Mais l'évolution de la technique des antennes a mis en lumière des contradictions internes de cette théorie, dite classique, et des désaccords avec l'expérience, qui n'ont pu être surmontés que dans des théories autonomes compatibles avec l'électromagnétisme. La répartition des courants y est différente de celle des lignes et la vitesse de propagation reste égale à c .

Or l'hélice illimitée est à l'antenne en hélice ce que la ligne ordinaire est à l'antenne rectiligne. L'onde principale de la théorie de la couche continue, l'onde d'ordre 0 de l'hélice filiforme jouent le rôle de l'onde transversale des lignes. L'antenne en hélice est très certainement justiciable d'une théorie autonome que le développement de la technique peut rendre un jour nécessaire. La répartition des courants y obéira à des lois plus ou moins compliquées. La tentative de MARSH répond au même souci que la théorie classique du dipôle : expliquer le fonctionnement de l'antenne en hélice au moyen des courants d'une ligne illimitée. Ce rapprochement indique la voie dans laquelle on doit, à notre avis s'engager : rendre compte du ralentissement des ondes de MARSH par un amortissement équivalent à l'énergie rayonnée. En dehors d'une théorie exacte, toute autre tentative est vraisemblablement vouée à l'échec.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a étudié la propagation d'ondes guidées par des circuits en hélice sur deux modèles simplifiés qui se prêtent à une résolution complète. Le modèle de la couche continue fournit une solution de révolution qui présente l'avantage d'une grande simplicité, rend compte du couplage entre spires et est en très bon accord avec l'expérience aux fréquences suffisamment basses. Ce modèle convient parfaitement à une théorie du tube à ondes progressives à faisceau étroit d'électrons.

Le modèle de l'hélice filiforme se prête plus difficilement au calcul ; mais, par l'analyse plus fine qu'il permet, il peut fournir des renseignements qui complètent ceux de la théorie précédente. La structure même de ces circuits simplifiés définit le domaine de validité de chacun d'eux. Le rôle fondamental de la fréquence apparaît en outre dans la discussion des résultats. On a notamment souligné l'équivalence des deux schémas en basse fréquence et montré la possibilité d'interpréter les solutions d'ordre supérieur de la couche par des solutions partielles du deuxième modèle.

Enfin la méthode développée en vue de résoudre le problème de l'hélice filiforme est susceptible d'applications plus générales. On a donné ici l'exemple du circuit de la ligne à retard.

Les modèles utilisés supposent le fil de l'enroulement suffisamment fin ($d \ll a$). Les spires sont plus ou moins serrées selon que le paramètre $\sigma =$ diamètre du fil/pas de l'hélice est plus ou moins voisin de 1. Les cas $\sigma = 1$ et $\sigma = 0$ ont précisément suggéré les circuits approchés qui ont fait le principal objet de ce travail. Les cas intermédiaires de la pratique seraient justiciables de théories plus raffinées, mais probablement d'une difficulté d'emploi prohibitive dans la technique. Imaginant qu'une telle théorie définisse les champs par des développements en série entière en σ , on peut dire que la théorie de l'hélice filiforme en constitue l'approximation

d'ordre 0. La méthode de SOLLFREY, récemment publiée [36] apparaît comme l'approximation d'ordre 1. Mais, comme les résultats de cet auteur confirment ceux qu'on a exposés ici, la théorie de l'hélice filiforme semble être correcte jusqu'au second ordre.

Les résultats expérimentaux obtenus dans l'étude des antennes en hélice soulèvent des difficultés d'interprétation qu'on n'a pas encore résolues. Une situation en tous points analogue s'est présentée dans le développement des théories de l'antenne ordinaire. On a essayé de donner ici la raison d'un échec auquel sont vouées toutes les tentatives similaires. Une solution provisoire pourrait être recherchée en attribuant au rayonnement de l'antenne l'amortissement et le ralentissement observés dans la propagation du courant.

M. Louis DE BROGLIE a suivi ces modestes recherches avec une extrême indulgence et a bien voulu accepter de présider le Jury. Je lui en exprime ici toute ma gratitude. M. le Professeur Pierre GRIVET a non seulement été à l'origine de ce travail mais m'a constamment aidé de ses conseils précieux. M. le Professeur André LICHNEROWICZ a bien voulu apporter le point de vue du Mathématicien. Je les en remercie profondément l'un et l'autre.

Élie ROUBINE,

18 décembre 1951.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLANC-LAPIERRE (A.), LAPOSTOLLE (P.), Contribution à l'études des amplificateurs à onde progressive. *Ann. Télécommunic.*, Fr. (décembre 1946), **1**, n° 12, p. 283.
- [2] BLANC-LAPIERRE (A.), LAPOSTOLLE (P.), VOGÉ (J. P.), WALLAUSCHEK (R.), Sur la théorie des amplificateurs à onde progressive. *Onde Électr.*, Fr. (mai 1947), **27**, n° 242, pp. 194-202.
- [3] BLEWETT (J. P.), RUBEL (J. H.), Lignes à retard pour signaux vidéo. (Video delay lines.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (décembre 1947), **35**, n° 12, pp. 1580-1584.
- [4] CHU (L. J.), JACKSON (J. D.), Théorie électromagnétique des tubes à onde progressive. (Field theory of travelling wave tubes.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (juillet 1948), **36**, n° 7, pp. 853-863.
- [5] CUTLER (G. C.), Détermination expérimentale des propriétés d'une onde hélicoïdale. (Experimental determination of helical wave properties.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (février 1948), **36**, n° 2, pp. 230-233.
- [6] DOEHLER (O.), KLEEN (W.), Influence du vecteur électrique transversal dans la ligne à retard du tube à propagation d'ondes. *Ann. de Radioélectr.*, Fr. (janvier 1949), **4**, n° 15, pp. 76-84.
- [7] DRUDE (P.), Sur la construction des transformateurs de Tesla. Durée d'oscillation et self-induction des bobines. (Zur Construction von Tesla-transformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduction von Drahtspulen.) *Ann. der Phys.*, Dtschl. (1902), **9**, pp. 293 et 590.
- [8] GEISS (W.), Onde fondamentale et harmoniques de bobines à une seule couche (Grundschwingung und Oberschwingungen einlagiger Spulen.) *Ann. der Phys.*, Dtschl. (1921), **9**, p. 377.
- [9] GODDARD (L. S.), Méthode de calcul de la longueur d'onde de résonance d'un type de cavité. (Method for computing the resonant wave length of a type of cavity resonator.) *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (juin 1945), **41**, pp. 160-175.
- [10] HAHN (W. C.), Une nouvelle méthode de calcul des cavités résonnantes. (A new method for the calculation of cavity resonators.) *J. of applied Physics*, U. S. A. (janvier 1941), **12**, pp. 62-68.
- [11] HALLEN (E.), Sur les oscillations électriques dans les conducteurs filiformes. (Ueber die elektrischen Schwingungen in drahtförmigen Leitern.) *Uppsala Universitets Arsskrift* Suède (1930), p. 1.
- [12] HOFMEIER (W.), Mesures de l'oscillation propre de bobines à une seule couche. (Ueber Messungen der Eigenschwingung einlagiger Spulen.) *Ann. der Phys.* (1924), **74**, p. 45.
- [13] JESSEL (M.), WALLAUSCHEK (R.), Étude expérimentale de la propagation le long d'une ligne à retard en forme d'hélice. *Ann. Télécommunic.*, Fr. (août-septembre 1948), **3**, n° 8-9, pp. 291-299.
- [14] KING (L. V.), Sur les conductivités électrique et acoustique de tubes cylindriques limités par des embases infinies. (On the electrical and acoustic conductivities of cylindrical tubes bounded by infinite flanges.) *Philosophical Magazine* (janvier 1936), **21**, p. 128.
- [15] KOPFNER (R.), Tube à onde progressive utilisé comme amplificateur d'ondes ultra-courtes. (Travelling-wave tube as amplifier at micro-waves.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, (février 1947), **35**, p. 124.
- [16] KORNHAUSER (E. T.), Champ rayonné par une antenne en hélice parcourue par un courant sinusoïdal. (Radiation field of helical antennas with sinusoidal current.) *J. Appl. Phys.*, U. S. A. (juillet 1951), **22**, n° 7, pp. 887-891.
- [17] LAMB (H.), Le champ magnétique d'une hélice. (The magnetic field of a helix.) *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* (1923), **21**, p. 477.
- [18] LAPLUME (J.), Théorie du tube à onde progressive. *Onde Électr.*, Fr. (février 1949), **29**, n° 263, pp. 66-68.
- [18] LAPOSTOLLE (P.), Les phénomènes d'interaction dans le tube à onde progressive. Théorie et vérifications expérimentales. *Ann. Télécommunic.*, Fr. (août-septembre 1948), **3**, n° 8-9, pp. 265-290.
- [20] LENZ (W.), Calcul des oscillations propres des bobines à une seule couche. (Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen.) *Ann. der Phys.* (1914), **43**, p. 749.
- [21] MARSH (J. A.), La distribution du courant sur les antennes en hélice. (Current distribution on helical antennas.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (juin 1951), **39**, n° 6, pp. 668-675.
- [22] MATTHEWS (W. E.), Ligne équivalente à des dispositifs à onde progressive. (Transmission line equivalent of electronic travelling wave systems.) *J. Appl. Phys.*, U. S. A. (mars 1951), **22**, n° 3, pp. 310-316.
- [23] NICHOLSON (J. W.), Le calcul approché des fonctions de BESSEL d'argument imaginaire. (The approximate calculation of BESSEL function of imaginary argument.) *Phil. Mag.* (1910), **20**, p. 938.
- [24] PHILLIPS (R. S.), Le champ électromagnétique produit par une hélice. (The electromagnetic field produced by a helix.) *Quart. Appl. Math.*, U. S. A. (octobre 1950), **8**, n° 3, pp. 229-246.
- [25] PIERCE (J. R.), Théorie du tube à onde progressive à faisceaux. (Theory of the beam-type travelling wave tube.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (février 1947), **35**, n° 2, pp. 111-123.

- [26] PIERCE (J. R.), Le champ transversal dans les tubes à onde progressive. (Transverse field in travelling-wave tubes.) *Bell System Techn. Journ.* U. S. A. (octobre 1948), **27**, n° 4, pp. 732-746.
- [27] POCKLINGTON (H. C.), Oscillations électriques dans les fils. (Electrical oscillations in wires). *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* (octobre 1897), **9**, p. 324.
- [28] ROUBINE (E.), Sur le circuit en hélice utilisé dans le tube à onde progressive. *C. R. Acad. Sci., Fr.* (14 avril 1947), **224**, n° 15, pp. 1101-1102 ; (21 avril 1947), **224**, n° 16, pp. 1149-1151.
- [29] ROUBINE (E.), Contribution à l'étude du tube à onde progressive. *Onde Électr. Fr.* (mai 1947), **27**, n° 242, pp. 203-208.
- [30] ROUBINE (E.), Sur le calcul du champ créé par un circuit en hélice. *C. R. Acad. Sci., Fr.* (15 janvier 1951), **232**, n° 3, pp. 221-222.
- [31] ROUBINE (E.), Sur les ondes guidées par des circuits hélicoïdaux. *C. R. Acad. Sci., Fr.* (7 mai 1951), **232**, n° 19, pp. 1748-1750.
- [32] ROUBINE (E.), Expression générale du champ électromagnétique d'une hélice. *C. R. Acad. Sci., Fr.* (18 juin 1951), **232**, n° 25, pp. 2297-2298.
- [33] ROUBINE (E.), Propriété du champ électromagnétique des hélices. *C. R. Acad. Sci., Fr.* (12 novembre 1951), **233**, n° 20, pp. 1174-1176.
- [34] SERVANT (R.), LOUDETTE (P.), Polarimètre hertzien pour l'étude des modèles macroscopiques de molécules actives. *C. R. Acad. Sci.* (13 novembre 1950), **231**, p. 1052.
- [35] SERVANT (R.), LOUDETTE (P.), Étude au polarimètre hertzien des rotateurs hélicoïdaux. *C. R. Acad. Sci.* (18 décembre 1950), **231**, p. 1465.
- [36] SOLLFREY (W.), Propagation d'ondes sur des fils en hélice. (Wave propagation on helical wires.) *J. Appl. Phys.*, U. S. A. (juillet 1951), **22**, n° 7, pp. 905-910.
- [37] SOMMERFELD (A.), Le champ alternatif et la résistance en courant alternatif des bobines et solénoïdes. (Ueber das Wechselfeld und den Wechselstromwiderstand von Spulen und Rollen.) *Ann. der Phys.* (1904), **15**, p. 673.
- [38] VAN IPEREN (B. B.), L'hélice comme circuit oscillant pour la production de très hautes fréquences. *Rev. Techn. Philips*, Pays-Bas (février 1950), **11**, n° 8, pp. 225-235.
- [39] WHINNERY (J. R.), JAMIESON (H. W.), Circuits équivalents aux discontinuités des lignes de transmission. (Equivalent circuits for discontinuities in transmission lines.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (février 1944), **32**, n° 2, pp. 92-114.
- [40] WHINNERY (J. R.), JAMIESON (H. W.), ROBBINS (T. H.), Discontinuités des lignes coaxiales. (Coaxial line discontinuities.) *Proc. Inst. Radio Engrs.*, U. S. A. (novembre 1944), **32**, n° 11, p. 695-709.
- [41] BATEMAN (H.), L'analyse mathématique du mouvement d'une onde électrique et optique. (The mathematical analysis of electrical and optical wave motion.) *Cambridge Univ. Press* (1915), p. 4.
- [42] BROGLIE (L. de), *Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques*. Gauthier-Villars, Paris (1950), 2^e édition, pp. 4, 9, 92.
- [43] KRAUSS (J. D.), *Les antennes* (Antennas). Mc Graw Hill Co, New-York (1950), p. 183 à 197.
- [44] MAGNUS (W.), OBERHETTINGER (F.), *Formules et théorèmes relatifs aux fonctions spéciales de la physique mathématique*. (Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics.) Chelsea Publishing Co (1949), 118 p.
- [45] PIERCE (J. R.), *Tubes à onde progressive*. (Travelling wave tubes.) Van Nostrand Co, U. S. A. (1950), 260 p.
- [46] SIESTRUNCK (R.), *Le développement moderne de la théorie de l'hélice*. Gauthier-Villars (1947), p. 16.
- [47] SOMMERFELD (A.), *Équations aux dérivées partielles de la physique*. (Partial differential equations in Physics.) Academic Press Inc., N.-Y. (1949), 335 p.
- [48] WATSON (G. N.), *Théorie des fonctions de Bessel*. (Theory of BESSEL Functions.) Cambridge Univ. Press, G.-B. (1944), 2^e édition, 804 p.
- [49] ZYGMUND A.), *Séries trigonométriques*. (Trigonometrical (Series.) Monografie Matematyczne Varsovie-Lwow (1935), chap. III.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — HISTORIQUE SOMMAIRE	5
RÉSOLUTION APPROCHÉE DU PROBLÈME	6
NOTATIONS	7
CHAPITRE II. — MÉTHODE DE LA COUCHE CONTINUE	8
Calcul du champ	8
Solution principale	9
Vitesse de l'onde guidée	10
Répartition du champ	11
Puissance transportée	12
Modes supérieurs	13
CHAPITRE III. — CHAMP CRÉÉ SUR L'AXE PAR UN FIL FIN EN HÉLICE	15
Insuffisance de la méthode de la couche continue	15
Hypothèses	15
Expressions des potentiels sur l'axe	16
Calcul des champs sur l'axe	17
Discussion des résultats	18
<i>Annexe au chapitre III</i>	21
Calcul d'intégrales définies	21
CHAPITRE IV. — ONDES HÉLICOÏDALES	22
Circuits hélicoïdaux	22
Ondes hélicoïdales	22
Expressions générales des coefficients	23
CHAPITRE V. — CHAMP D'UNE HÉLICE FILIFORME DANS TOUT L'ESPACE	24
Exposé de la méthode de calcul	24
Conditions aux limites	25
Calcul des coefficients A_n, B_n, C_n, D_n	26
Champ sur l'axe	26
Expressions asymptotiques des coefficients	27
Convergence des développements des composantes	28
Discussion des développements sur le cylindre	28
Application : vitesse de l'onde le long du fil	29
Expressions définitives du champ	29
Cas particulier : problème du solénoïde ordinaire	29
Interprétation de la solution générale	30
<i>Discussion et applications</i>	31
Comportement des constantes de phase	31
Champ au voisinage de l'axe	31
Champ au voisinage du fil	34
Champ sur la surface du cylindre	35
<i>Annexe au chapitre V</i>	35
Expressions asymptotiques des fonctions de BESSEL modifiées	35
Convergence des développements des composantes du champ	36
CHAPITRE VI. — CIRCUITS DU TYPE COAXIAL	37
Lignes à retard	37
Cas d'une hélice lâche	38
CHAPITRE VII. — COMPARAISON DE LA THÉORIE AVEC L'EXPÉRIENCE	39
Généralités	39
Vitesse de propagation en basse fréquence	39
Vitesse de propagation en haute fréquence	40
CONCLUSION	41
BIBLIOGRAPHIE	42

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La théorie des distributions de L. Schwartz en Physique Mathématique

Vu et approuvé :

Paris, le 10 Décembre 1951.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

Signé : A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Signé : JEAN SARRAILH.

